Топология-3, семинар 9, 07.04.2017.

Задача 1. Докажите, что $M(\xi\times\eta)\cong M\xi\wedge M\eta$, и, как следствие, $M(\xi\oplus\underline{\mathbb{R}^n})\cong\Sigma^n M\xi$. ($\wedge$ обозначает приведенное произведение пунктированных пространств: $A\wedge B=(A\times B)/(A\times \mathrm{pt}\cup \mathrm{pt}\times B)$

Обобщенной теорией гомологий называется ковариантный функтор h_* из категории пар клеточных комплексов (с произвольными непрерывными отображениями пар в качестве морфизмов) в категорию $\mathbb{Z}$-градуированных модулей, обладающий следующими свойствами: (1) Гомотопическая инвариантность: если $f\simeq g\colon (X,A)\to(Y,B)$, то $f_*=g_*\colon h_*(X,A)\to h_*(Y,B)$; (2) Точная последовательность пары:

$$\cdots\to h_n(A)\xrightarrow{i_*}h_n(X)\xrightarrow{p_*}h_n(X,A)\xrightarrow{\partial}h_{n-1}(X)\to\cdots$$

где $h_n(X)\overset{\mathrm{def}}{=}h_n(X,\varnothing)$; (3) Вырезание: $h_*(X,A)\xrightarrow{p_*}h_*(X/A,\mathrm{pt})$ — изоморфизм; (4) Аддитивность: если (X_α,A_α) — семейство пар, и $i_\alpha\colon(X_\alpha,A_\alpha)\hookrightarrow\bigsqcup_\alpha(X_\alpha,A_\alpha)$ естественные включения, то $\bigoplus_\alpha(i_\alpha)_*\colon\bigoplus_\alpha h_*(X_\alpha,A_\alpha)\to h_*(\bigsqcup_\alpha(X_\alpha,A_\alpha))$ — изоморфизм. Аналогично определяется обобщенная теория когомологий.

Задача 2.* Спектром называется последовательность пунктированных клеточных комплексов $\{\mathcal{E}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ вместе с фиксированными структурными отображениями $r\colon\Sigma\mathcal{E}_k\to\mathcal{E}_{k+1}$. Будем также считать, что спектр сходится, т.е. $\exists m$ т.ч. комплекс $\mathcal{E}_{m+k}$ k-связен. Докажите одно из следующих утверждений: (а) группы $E_n(X,A)=\lim_{k\to\infty}\pi_{n+k}((X/A)\wedge\mathcal{E}_k)$ задают обобщенную теорию гомологий (б) группы $E^n(X,A)=\lim_{k\to\infty}[\Sigma^{n-k}(X/A),\mathcal{E}_k]$ задают обобщенную теорию когомологий.

Задача 3. Докажите, что стабильные гомотопические группы являются обобщенной теорией гомологий, а просто гомотопические группы — нет.

Задача 4. (а) Докажите, что пространства Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z},n)$ образуют спектр, и задаваемые ими теория (ко)гомологий — это обычные (ко)гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. (б) Докажите, что пространства $M\,\mathrm{SO}(k)$ образуют спектр.

Задача 5.* Пусть (X,A) клеточная пара, а $\Omega_n^{\mathrm{SO}}(X,A)$ — группа геометрических бордизмов в X. Элементы $\Omega_n^{\mathrm{SO}}(X,A)$ — это всевозможные непрерывные отображения $f\colon M^n\to X$, где M — гладкое ориентированное многообразие, $f(\partial M)\subset A$. Два элемента $f_1\colon M_1\to X$ и $f_2\colon M_2\to X$ считаются эквивалентными, если существует $F\colon N^{n+1}\to X$, где N — гладкое многообразие, $M_1,-M_2$ — подмногообразия в ∂N, $F|_{M_1}=f_1$, $F|_{M_2}=f_2$, и $F(\partial N\backslash(M_1\sqcup M_2))\subset A$. Сумма задается дизъюнктным объединением. Докажите, что $\Omega_n^{\mathrm{SO}}(X,A)$ совпадает с обобщенной теорией гомологий, построенной по спектру $M\,\mathrm{SO}(k)$.