Топология-3, семинар 8, 31.03.2017.

Задача 1. (a) Пусть $M = M_1 \sqcup M_2$. Тогда любое характеристическое число многообразия M равно сумме соответствующих характеристических чисел многообразий M_1 и M_2. (б) Любое число Понтрягина p_I удовлетворяет формуле $p_I(-M) = -p_I(M)$, где $-M$ — многообразие M с противоположной ориентацией.

Задача 2. Докажите, что эйлерова характеристика $\mod 2$ является инвариантом неориентированного бордизма.

Задача 3. (а) Вычислить характеристические числа $s_{1,1,1}(\mathbb{C}P^3)$, $s_{1,2}(\mathbb{C}P^3)$, $s_3(\mathbb{C}P^3)$. (б) Вычислить характеристическое число $s_n(\mathbb{C}P^n)$.

Задача 4. При каких m, n вещественный грассманиан неориентированных плоскостей $G_{m,n}$ ориентируем?

Задача 5.* Сколько существует аффинных комплексных прямых в $\mathbb{C}^3$, которые пересекают 4 заданные прямые общего положения?

Задача 6.* Опишите корни Черна расслоения $\Lambda^k \xi$ — k-й внешней степени расслоения ξ в терминах корней Черна расслоения ξ.

Задача 7.* Аналогичный вопрос для k-й симметрической степени.

Рассмотрим множество $VB(X)$ классов эквивалентности всех вещественных (соотв. комплексных) расслоений над заданным CW-комплексом X. Операции прямой суммы и тензорного произведения задают на этом множестве структуру полукольца. Соответствующее кольцо Гротендика (т.е. множество формальных разностей $\eta - \xi$, $\eta, \xi \in VB(X)$) называется *K-теорией* пространства X и обозначается $KO(X)$ (в комплексном случае $K(X)$).

Задача 8. Доказать, что $K(\mathrm{pt}) = KO(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм $f^*\colon K(Y) \to K(X)$. Гомотопные отображения индуцируют одинаковые гомоморфизмы.

Задача 9. Для комплексного расслоения ξ с базой X и корнями Черна $t_1, \dots, t_n$ рассмотрим размерностно-неоднородный элемент $\mathrm{ch}(\xi) := e^{t_1} + \dots + e^{t_n} \in H^{2*}(X; \mathbb{Q})$ (элемент корректно определен, поскольку выражение симметрично по t_i). Этот элемент называется *характером Черна* расслоения ξ. Докажите, что характер Черна задает мультипликативный гомоморфизм из K-теории $K(X)$ в $H^{2*}(X; \mathbb{Q})$. Иными словами, $\mathrm{ch}(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ch}(\xi) + \mathrm{ch}(\eta)$ и $\mathrm{ch}(\xi \otimes \eta) = \mathrm{ch}(\xi) \cdot \mathrm{ch}(\eta)$.