Топология-3, семинар 5, 10.03.2017.

Задача 1. (а) Докажите, что характеристические классы Черна и Штифеля-Уитни стабильны, т.е. если ξ — векторное расслоение над X, а $\underline{\mathbb{R}^k}$ — тривиальное векторное расслоение, то $w_i(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}^k}) = w_i(\xi)$ и аналогично для c_i. (б) Докажите, что естественное вложение группы $U(n) \hookrightarrow U(n+k)$ индуцирует следующий гомоморфизм в когомологиях классифицирующих пространств:

$$H^*(BU(n+k);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_{n+k}] \to H^*(BU(n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_n];$$

$$c_1 \mapsto c_1, \quad \dots \quad, c_n \mapsto c_n, \quad c_{n+1} \mapsto 0, \quad \dots \quad, c_{n+k} \mapsto 0.$$

Задача 2. Пусть η — произвольное векторное расслоение с базой $X = \bigcap_\alpha U_\alpha$, и пусть $\psi_{\alpha,\beta}(x) \in O(n)$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ — функции перехода этого расслоения. Рассмотрим одномерное векторное расслоение, функции перехода которого суть $\det \eta_{\alpha,\beta}(x) \in \{\pm 1\}$. Такое расслоение называется детерминантным расслоением для расслоения η и обозначается $\det \eta$. Докажите, что η ориентируемо в том и только том случае, когда $\det \eta$ тривиально. Сформулируйте и докажите аналог этого факта для комплексных расслоений.

Задача 3. Пусть η — произвольное векторное расслоение с (пара)компактной базой X. Тогда существует такое пространство Y и такое отображение $p\colon Y \to X$, что (1) $p^*\colon H^*(X;R) \to H^*(Y;R)$ инъективно, (2) расслоение $p^*\eta$ есть прямая сумма одномерных векторных расслоений над Y. Как обычно, тут предполагается, что либо расслоения комплексные и $R = \mathbb{Z}$, либо расслоения вещественные и $R = \mathbb{Z}_2$. (Указание: в качестве пространства Y нужно взять “флагизацию” расслоения η, т.е. заменить каждый слой расслоения η на пространство полных флагов в этом слое).

Из этой теоремы выводится *принцип расщепления*: любое полиномиальное соотношение на классы Черна либо Штифеля–Уитни векторных расслоений достаточно доказывать в предположении, что они расщепляются в сумму одномерных.

Задача 4. Пусть векторное расслоение η на X (для определенности пусть оно комплексное) классифицируется отображением $f\colon X \to BU(n)$, а расслоение ξ классифицируется отображением $g\colon X \to BU(k)$. Опишите отображение $X \to BU(nk)$, которое классифицирует расслоение $\eta \otimes \xi$.

Задача 5. (1) В обозначениях предыдущей задачи описать классифицирующее отображение для $S^r\eta$, симметрической степени расслоения η. (2) Описать классифицирующее отображение для внешней степени $\Lambda^r\eta$. (3) Докажите, что старшая внешняя степень расслоения совпадает с его детерминантным расслоением.

Задача 6.* Докажите, что вещественное векторное расслоение η ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\eta) = 0$.

Задача 7.* Пусть $\mathrm{SU}(n)$ — группа унитарных матриц с определителем 1. Доказать, что структурную группу комплексного расслоения ξ можно редуцировать к $\mathrm{SU}(n)$ тогда и только тогда, когда $c_1(\xi) = 0$.