Топология-3, семинар 4, 03.03.2017.

Задача 1. Объясните функториальность конструкции классифицирующего пространства: любой гомоморфизм $f\colon G \to H$ компактных топологических групп (т.е. непрерывное отображение, сохраняющее умножение) индуцирует непрерывное отображение $Bf\colon BG \to BH$ (определенное, как и сама конструкция классифицирующего пространства, лишь с точностью до гомотопической эквивалентности). Если $f\colon H \hookrightarrow G$ — включение подгруппы, то $Bf\colon BH \to BG$ — расслоение со слоем G/H (множество левых смежных классов G по подгруппе H).

Задача 2.* Докажите, что для любого вещественного расслоения η над компактной базой B найдется такое векторное расслоение ξ над B, что $\eta \oplus \xi$ — тривиальное расслоение. Докажите, что требование компактности базы убрать нельзя.

Задача 3. Пусть X — компактный CW-комплекс, а $C(X)$ — алгебра непрерывных вещественнозначных функций на X. Пусть η — вещественное векторное расслоение над X. Докажите, что множество сечений $\Gamma(\eta)$ расслоения η обладает структурой модуля над $C(X)$. (а) Докажите, что модуль $\Gamma(\eta)$ свободен в том и только том случае, когда η тривиально. (б) Модуль прямой суммы расслоений равен прямой сумме модулей. (в) Докажите, что для произвольного расслоения η модуль $\Gamma(\eta)$ является проективным (то есть прямым слагаемым в свободном модуле).

Задача 4. Пусть η — комплексное расслоение, а $\overline{\eta}$ — расслоение с противоположной комплексной структурой. Докажите, что $c_i(\overline{\eta}) = (-1)^i c_i(\eta)$.

Задача 5. Пусть $S\mathbb{Z}_2^n = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum \epsilon_i = 0 \mod 2\}$. Рассмотрев коммутативную диаграмму групп (слева) и соответствующих гомоморфизмов когомологий классифицирующих пространств (справа)

$$
\begin{tikzcd}
S\mathbb{Z}_2^n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{SO}(n) \arrow[d, hook] \\
\mathbb{Z}_2^n \arrow[r, hook] & O(n)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^*(B\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[d] \\
H^*(B\,\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & H^*(BS\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}
$$

докажите, что $H^*(B\,\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \dots, w_n]$, $\deg w_i = i$, а гомоморфизм

$$H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_n] \to H^*(B\,\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2)$$

посылает w_1 в 0, а остальные образующие тождественно.

Задача 6. Пусть $F_n = F_{n;1,\dots,n}$ — многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$. Доказать, что $\beta_i(F_n) = 0$ при нечетных i, а в четных размерностях числа Бетти удовлетворяют равенству $\sum \beta_{2i}(F_n)t^i = \prod_{i=1}^{n-1}(1 + t + \dots + t^i)$.

Задача 7. Доказать, что $H^*(U(n);\mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[u_1, u_3, \dots, u_{2n-1}]$, $\deg u_i = i$. (Указание: исследовать расслоение $U(n) \to S^{2n-1}$ со слоем $U(n-1)$, использовать теорему Лере–Хирша и индукцию).

Задача 8. Доказать, что $H^*(\mathrm{SU}(n);\mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[u_3, \dots, u_{2n-1}]$, $\deg u_i = i$.