Топология-3, семинар 3, 24.02.2017.

Задача 1. Докажите, что множество всех n-мерных векторных подпространств в m-мерном векторном пространстве V (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) является замкнутым многообразием[1]. Оно называется многообразием Грассмана или грассманианом и обозначается $G_n(V)$ (или $G_{m,n}$, $G_{m,n}(\mathbb{C})$).

Задача 2. Доказать, что множество ортонормированных k-реперов в векторном пространстве V является замкнутым многообразием. Оно называется многообразием Штифеля и обозначается $V_{m,n}$ (или $V_{m,n}(\mathbb{C})$ в комплексном случае).

Задача 3. Пусть $0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_k < m$ и $V \cong \mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$. Набор подпространств $W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_k \subset V$, $\dim W_s = j_s$ называется флагом в V, соответствующим последовательности $(j_1, \ldots, j_k)$. Докажите, что множество флагов, соответствующих заданной последовательности $(j_1, \ldots, j_k)$, является замкнутым многообразием. Оно называется многообразием флагов и будет обозначаться $F_{m;j_1,\ldots,j_k}$.

Задача 4. (а) Доказать, что $BT^n \simeq K(\mathbb{Z}^n, 2)$. (б) Доказать, что множество классов изоморфизма главных T^n-расслоений над CW-комплексом X биективно множеству $H^2(X;\mathbb{Z})$, причем тривиальному расслоению соответствует $0 \in H^2(X;\mathbb{Z})$.

Задача 5. Опишите все главные $\mathbb{Z}_2$-расслоения над $\mathbb{R}P^n$.

Задача 6. Докажите, что: (а) если на векторном расслоении η есть скалярное произведение, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\eta, \underline{\mathbb{R}}) \cong \eta$. (б) Если на комплексном векторном расслоении η есть эрмитово произведение, то $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\eta, \underline{\mathbb{C}}) \cong \bar{\eta}$.

Задача 7. Докажите, что операция тензорного произведения задает на множестве (классов изоморфизма) одномерных вещественных расслоений над B структуру группы. Если на η есть скалярное произведение, то η является элементом порядка 2 или единицей в этой группе.

Задача 8. Докажите, что группа из предыдущей задачи изоморфна $H^1(B;\mathbb{Z}_2)$.

Задача 9.* Пусть G — дискретная группа, а BG — ее классифицирующее пространство. Докажите, что когомологии $H^*(BG;R)$ можно вычислить следующим образом. Пусть $C^n(G;R)$ — модуль всех функций из G^n в R. Зададим гомоморфизм $d^n \colon C^n(G;R) \to C^{n+1}(G;R)$ формулой

$$\begin{aligned}
&d^n\phi(g_1, \ldots, g_{n+1}) = \\
&= \phi(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \phi(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i \cdot g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1}\phi(g_1, \ldots, g_n).
\end{aligned}$$

Проверьте, что $d^{n+1} \circ d^n = 0$ и $\ker d^n / \operatorname{Im} d_{n-1} \cong H^n(BG;R)$.

[1] Отдельный бонус тем, кто введет гладкую структуру в задачах 1,2,3