Топология-3, семинар 2, 17.02.2017.

Задача 1. Для любого $\alpha \in C_{k+l}(X;R)$, $\phi \in C^k(X;R)$ и $\psi \in C^l(X;R)$ имеем

$$\psi(\alpha \frown \phi) = (\psi \smile \phi)(\alpha).$$

Задача 2. Пусть $\epsilon\colon H_0(X;R) \to R$ — гомоморфизм аугментации. Тогда $\epsilon(\alpha \frown \phi) = \phi(\alpha)$ для любых $\alpha \in C_k(X;R)$ и $\phi \in C^k(X;R)$.

Задача 3. Пусть X, Y — замкнутые ориентируемые многообразия и $f\colon X \to Y$ — отображение, имеющее ненулевую степень. Докажите, что $\beta_i(X) \geqslant \beta_i(Y)$ при всех i, где β_i — i-е число Бетти.

Задача 4. Пусть M_g — сфера с g ручками. (а) Докажите, что отображение $f\colon M_g \to M_h$ ненулевой степени существует тогда и только тогда, когда $g \geqslant h$. (б) При каких g и h существует накрытие $M_g \to M_h$?

Задача 5.* Пусть $f\colon S^n \to S^m$ непрерывное отображение, переводящее антиподальные точки в антиподальные: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in S^n$. Доказать, что $n \leqslant m$.

Задача 6. Вывести двойственность Пуанкаре, двойственность Пуанкаре–Лефшеца и двойственность Александера из двойственности Пуанкаре–Александера–Лефшеца.

Задача 7. Задать гладкую структуру на многообразиях $S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$.

Задача 8. Пусть X, Y — гладкие многообразия. Задать гладкую структуру на произведении $X \times Y$.

Задача 9.* Часовщик смастерил часы с неразличимыми минутной и часовой стрелками. Сколько раз в день по таким часам нельзя точно определить время? Ход стрелок непрерывный, циферблат 12-часовой. Принимается, конечно, любое верное решение, но решение с применением когомологий особенно порадует принимающих.