Топология-3, семинар 12, 28.04.2017.

Задача 1. Доказать по определению, что $\mathbb{C}P^{2k+1}$ — граница ориентируемого многообразия (подсказка: построить и использовать расслоение $\mathbb{C}P^{2k+1} \to \mathbb{H}P^k$ со слоем $\mathbb{C}P^1$, где $\mathbb{H}P^k$ — кватернионное проективное пространство).

Задача 2. Является ли эйлерова характеристика родом Хирцебруха? Если да, то какой ряд ее задает?

Задача 3. Докажите, что сигнатура тензорного произведения билинейных форм равна произведению сигнатур этих форм.

Задача 4. Если M^{4n} — граница ориентируемого многообразия B (возможно, несвязная), то сумма сигнатур ее компонент связности равна 0.

Задача 5. (а) Вычислить сигнатуру многообразий T^4 и $k\mathbb{C}P^2 \# l\overline{\mathbb{C}P}^2$ (связная сумма k копий $\mathbb{C}P^2$ и l копий $\mathbb{C}P^2$ с обращенной ориентацией), и описать их первый класс Понтрягина. (б) При каких значениях k и l многообразие $k\mathbb{C}P^2 \# l\overline{\mathbb{C}P}^2$ является границей ориентируемого пятимерного многообразия?

Задача 6. $\hat{A}$-род задается рядом $\dfrac{\sqrt{t}/2}{\sinh(\sqrt{t}/2)}$. Вычислить $\hat{A}$-род многообразия $\mathbb{C}P^{2n}$.

Задача 7.* Пусть род Хирцебруха $\phi_Q\colon \Omega_*^{\mathrm{SO}} \to R$ задается рядом $Q \in R[[t]]$, начинающимся с 1. Рассмотрим нечетный формальный ряд $f(t) = t/Q(t^2)$ (начинающийся с $t + \ldots$). Пусть $g(y) \in R[[y]]$ — ряд, функционально обратный к f, то есть $f(g(t)) = t$. Ряд g называется логарифмом рода ϕ_Q. Таким образом, формальная производная $g'(y)$ является четным рядом, начинающимся с 1. Докажите, что $g'(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_Q(\mathbb{C}P^n) y^n$.

Задача 8.* Пусть $R = \Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q}$ и $\phi\colon \Omega_*^{\mathrm{SO}} \otimes \mathbb{Q} \to R$ — тождественный гомоморфизм. ϕ называется универсальным родом Хирцебруха. Пусть $Q(t) \in R[[t]]$ — ряд, который задает универсальный род. Вычислите первые три члена этого ряда.