Топология-3, семинар 11, 21.04.2017.

Задача 1. Докажите, что если $\chi(M) = 0$, то на M есть ненулевое векторное поле (M — гладкое связное замкнутое многообразие, поле достаточно построить непрерывное).

Задача 2. Пусть M^{2m} компактное комплексное подмногообразие в компактном комплексном многообразии N^{2m+2}, и пусть $u \in H^2(N;\mathbb{Z})$ класс, Пуанкаре двойственный к $[M] \in H^{2m-2}(N;\mathbb{Z})$. Докажите, что полный класс Черна $c(M)$ совпадает с ограничением на M когомологического класса $\dfrac{c(N)}{1+u} \in H^{2*}(N;\mathbb{Z})$.

Задача 3. Пусть $M \subset \mathbb{C}P^2$ гладкая комплексная кривая степени d (последнее означает, что M есть множество нулей однородного многочлена степени d, а это значит, что любая проективная прямая общего положения пересекает M в d точках). Докажите, что M есть ориентированная поверхность эйлеровой характеристики $d(3-d)$ (и, следовательно, рода $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$).

Задача 4.* Пусть $M^{2m} \subset \mathbb{C}P^{m+1}$ гладкая гиперповерхность степени d. Докажите, что $s_m(M) = d(m+2-d^m)$.

Задача 5.* Пусть $i \geqslant j \geqslant 2$. Рассмотрим *гиперповерхность Милнора*:

$$H_{i,j} \subset \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j = \{([x_0 : \dots : x_i], [y_0 : \dots : y_j]) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \mid x_0y_0 + \ldots + x_jy_j = 0\}.$$

(а) Докажите, что $[H_{i,j}] \in H_{2(i+j-1)}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j;\mathbb{Z})$ Пуанкаре двойственнен к $t_1 + t_2 \in H^2(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j;\mathbb{Z})$, где t_1, t_2 — стандартные образующие колец $H^*(\mathbb{C}P^i)$ и $H^*(\mathbb{C}P^j)$.

(б) Докажите, что $s_{i+j-1}(H_{i,j}) = -\binom{i+j}{i}$.

Задача 6. (а) Докажите, что НОД n-й строчки треугольника Паскаля (всех элементов, кроме крайних единиц) равен p, если $n = p^k$, p — простое, и 1 иначе. (б) Докажите, что любую мультипликативную образующую кольца Ω_U^* можно построить в виде дизъюнктного объединения многообразий $\pm\mathbb{C}P^k$, $\pm H_{i,j}$ (Новиков).

Задача 7. Доказать, что общая кубическая поверхность в $\mathbb{C}P^3$ содержит ровно 27 проективных прямых. Указание: всевозможные прямые в $\mathbb{C}P^3$ образуют грассманиан $G_{4,2}$; ограничивая кубическое уравнение f поверхности на все эти прямые, мы получим сечение расслоения $S^3\gamma_2^*$; осталось посчитать число нулей этого сечения, которое равно $\int_{G_{4,2}} e(S^3\gamma_2^*)$ (поскольку все комплексное, все знаки одинаковые и ими можно пренебречь). Для зачета задачи необходимо и достаточно вычислить $\int_{G_{4,2}} e(S^3\gamma_2^*)$.