Топология-3, семинар 10, 14.04.2017.

Задача 1. (а) Если η нечетномерно, то $2e(\eta) = 0$. (б) $e(\eta_1 \oplus \eta_2) = e(\eta_1) \smile e(\eta_2)$. (в) Пусть $2e(\eta) \neq 0$. Тогда η не может быть представлено в виде прямой суммы двух векторных расслоений, одно из которых нечетномерно.

Задача 2. При каких n на сфере S^n существует нигде не нулевое векторное поле?

Задача 3. (а) Пусть η — ориентированное n-мерное вещественное расслоение. Тогда $(\eta_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \eta \oplus \eta$ при изоморфизме, который либо сохраняет, либо меняет ориентацию в зависимости от четности числа $n(n-1)/2$. (б) Для всякого $2k$-мерного ориентированного вещественного расслоения η выполнено $p_k(\eta) = e(\eta)^2$.

Задача 4. Докажите, что $\mathbb{Z}_2$-аналог класса Эйлера (определенный также и для неориентируемых расслоений) совпадает с $w_m(\eta)$ — старшим классом Штифеля–Уитни, где m — ранг расслоения η.

Задача 5. Пусть η — комплексное расслоение размерности n, и $\eta_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. Тогда $c_n(\eta) = e(\eta_{\mathbb{R}})$.

Задача 6. *Точная последовательность Гизина.* Пусть $\xi\colon E \to B$ — ориентируемое n-мерное векторное расслоение. Докажите существование точной последовательности

$$\cdots \to H^i(B) \xrightarrow{\smile e(\xi)} H^{i+n}(B) \to H^{i+n}(E \setminus B) \to H^{i+1}(B) \to \cdots,$$

используя точную последовательность когомологий пары $(E, E\setminus B)$ и изоморфизм Тома.

Задача 7. Пусть $i\colon M^m \hookrightarrow N^{m+k}$ вложение гладкого ориентируемого подмногообразия в ориентируемое многообразие. Докажите, что $e(\nu_{M\subset N}) \in H^k(M;\mathbb{Z})$ совпадает с ограничением на M класса из $H^k(N;\mathbb{Z})$, Пуанкаре двойственного к $[M] \in H_m(N;\mathbb{Z})$.

Задача 8. Пусть M — замкнутое гладкое ориентированное многообразие, а $\eta\colon E \to M$ — ориентированное расслоение ранга k. Тогда $e(\eta) \in H^k(M;\mathbb{Z})$ — это класс, Пуанкаре двойственный к трансверсальному пересечению нулевого сечения $M \hookrightarrow E$ с собой.

Задача 9. Пусть M — гладкое замкнутое ориентируемое многообразие и $\Delta\colon M \to M \times M$ диагональное вложение. Тогда $\nu_{\Delta(M)\subset M\times M} \cong TM$.

Задача 10.* Докажите, что все классы Штифеля–Уитни замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия равны 0.