Топология-3, семинар 7, 24.03.2016.

Задача 1. (а) Пусть $S\mathbb{Z}_2^n = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{Z}_2^n \mid \sum \epsilon_i = 0 \mod 2\}$. Рассмотрев коммутативную диаграмму групп (слева) и соответствующих гомоморфизмов когомологий классифицирующих пространств (справа)

$$\begin{tikzcd} S\mathbb{Z}_2^n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{SO}(n) \arrow[d, hook] \\ \mathbb{Z}_2^n \arrow[r, hook] & O(n) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^*(B\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[d] \\ H^*(B\,\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "="] & H^*(BS\mathbb{Z}_2^n;\mathbb{Z}_2) \end{tikzcd}$$

докажите, что $H^*(B\,\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2, w_3, \dots, w_n]$, $\deg w_i = i$, а гомоморфизм $H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \dots, w_n] \to H^*(B\,\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2)$ посылает w_1 в 0, а остальные образующие тождественно.

(б) Докажите, что вещественное векторное расслоение η ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\eta) = 0$.

Задача 2. Пусть $\mathrm{SU}(n)$ — группа унитарных матриц с определителем 1. Доказать, что структурную группу комплексного расслоения ξ можно редуцировать к $\mathrm{SU}(n)$ тогда и только тогда, когда $c_1(\xi) = 0$.

Задача 3. Пусть η — комплексное расслоение, а $\overline{\eta}$ — расслоение с противоположной комплексной структурой. Докажите, что $c_i(\overline{\eta}) = (-1)^i c_i(\eta)$.

Задача 4. Пусть $F_n = F_{n;1,\dots,n}$ — многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$. Доказать, что $\beta_i(F_n) = 0$ при нечетных i, а в четных размерностях числа Бетти удовлетворяют равенству $\sum \beta_{2i}(F_n) t^i = \prod_{i=1}^{n-1}(1 + t + \dots + t^i)$.

Задача 5. Доказать, что $H^*(U(n);\mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[u_1, u_3, \dots, u_{2n-1}]$, $\deg u_i = i$. (Указание: исследовать расслоение $U(n) \to S^{2n-1}$ со слоем $U(n-1)$, теорема Лере–Хирша и индукция).

Задача 6. Доказать, что $H^*(\mathrm{SU}(n);\mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[u_3, \dots, u_{2n-1}]$, $\deg u_i = i$.