

Топология-3, семинар 3, 25.02.2016.

Пусть I — симплекс симплициального комплекса K . Для большего симплекса $J \supset I$ рассмотрим дополнительную грань $J \setminus I$ (т.е. грань симплекса J , натянутую на вершины, не лежащие в I). Объединение $J \setminus I$ по всем $J \supset I$ называется линком симплекса I и обозначается $\text{link}_K I$.

Задача 1. Пусть I — симплекс некоторого симплициального комплекса, а $F_I \subset K'$ — двойственный блок. Докажите, что $F_I \cong \text{Cone } \partial F_I$ и $\partial F_I \cong \text{link } I$.

Задача 2. Пусть I — симплекс триангуляции замкнутого гомологического многообразия размерности n , а F_I — двойственный блок. Докажите, что $\dim F_I = n - \dim I$, и

$$H_j(F_I, \partial F_I; R) = \begin{cases} R, & \text{если } j = n - \dim I; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 3. Доказать, что эйлерова характеристика нечетномерного замкнутого многообразия равна 0.

Пусть X, Y — замкнутые ориентированные многообразия размерности n , $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, а $[X], [Y]$ — фундаментальные классы. Поскольку $[X]$ и $[Y]$ суть образующие групп $H_n(X; \mathbb{Z})$ и $H_n(Y; \mathbb{Z})$ соответственно, имеем $f_*([X]) = k[Y]$, для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Число k называется степенью отображения f и обозначается $\deg f$.

Задача 4. Пусть X, Y — замкнутые ориентируемые многообразия и $f: X \rightarrow Y$ — отображение, имеющее ненулевую степень. Докажите, что $\beta_i(X) \geq \beta_i(Y)$ при всех i , где β_i — i -е число Бетти.

Задача 5. Пусть M_g — сфера с g ручками. (а) Докажите, что отображение $f: M_g \rightarrow M_h$ ненулевой степени существует тогда и только тогда, когда $g \geq h$. (б) При каких g и h существует накрытие $M_g \rightarrow M_h$?

Задача 6.* Пусть $f: S^n \rightarrow S^m$ непрерывное отображение, переводящее антиподальные точки в антиподальные: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in S^n$. Доказать, что $n \leq m$.

Задача 7. (Теорема Борсука–Улама) Для любого непрерывного отображения $h: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in S^n$, такая что $h(x) = h(-x)$.¹

¹В случае $n = 2$ это можно сформулировать так: на Земле найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых совпадают как значения температуры, так и значения давления.