

Топология-3, семинар 1, 11.02.2016.

Задача 1. Вычислить гомологии и когомологии k -мерного остова n -мерного симплекса, где $0 < k \leq n$.

Задача 2.* Пусть X — стягиваемый n -мерный симплициальный комплекс с m вершинами. Каково максимальное возможное число n -мерных симплексов у такого симплициального комплекса?

Задача 3. Пусть X, Y — CW-комплексы. Докажите, что существует естественная гомотопическая эквивалентность $\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee X * Y$. Если R — поле, то

$$\tilde{H}_n(X * Y; R) \cong \bigoplus_{i+j=n+1} \tilde{H}_i(X; R) \otimes \tilde{H}_j(Y; R).$$

Задача 4. Пусть X, Y — связные CW-комплексы с отмеченными точками. Докажите, что $H^i(X \vee Y) \cong H^i(X) \oplus H^i(Y)$ при $i \geq 1$, а произведение когомологических классов $\phi \in H^i(X) \subset H^i(X \vee Y)$ и $\psi \in H^j(Y) \subset H^j(X \vee Y)$ равно нулю при $i, j \geq 1$.

Задача 5. Описать кольцо когомологий поверхности M_g (сферы с g ручками). Указание: построить отображение из M_g в букет g копий двумерного тора.

Задача 6. Пусть $x \in X$. Группа $H_i(X, X \setminus x; R)$ называется группой i -х локальных гомологий пространства X в точке x .

(а) Докажите, что группы локальных гомологий являются локальным инвариантом, то есть зависят лишь от сколь угодно малой окрестности точки $x \in X$.

(б) Вычислите группы локальных гомологий пространства \mathbb{R}^n в произвольной точке.

(в) Вычислите группы локальных гомологий конечного графа в каждой его точке.