

## Накрытия

**Задача 10.0.** Приведите пример нетривиального двулистного накрытия  $S^1 \vee S^1$ .

**Задача 10.1.** Постройте универсальное накрытие

а) ленты Мёбиуса; б)  $S^1 \vee S^1$ ; в)  $S^1 \vee S^2$ ; г\*) сферы с  $g \geq 2$  ручками.

**Задача 10.2.** Если пространство  $X$  покрывает  $k$ -листно пространство  $Y$ , то  $\chi(X) = k \cdot \chi(Y)$ .

**Задача 10.3.** а) Накройте сферу с двумя ручками сферой с тремя ручками.

б) Когда сферой с  $G$  ручками можно накрыть сферу с  $g$  ручками?

**Задача 10.4\*.** Найдите род *эллиптической кривой* — подмножества  $\mathbb{C}P^2$ , задаваемого в неоднородных координатах уравнением  $y^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ ; обобщите на *гиперэллиптическую кривую*,  $y^2 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$ .

УКАЗАНИЕ. Проекция  $(x, y) \mapsto x$  становится 2-листным накрытием, если выбросить из  $\mathbb{C}P^1$  конечное множество точек.

**Задача 10.5.** а) Подгруппа свободной группы свободна.

б) Свободная группа с двумя образующими содержит в качестве подгруппы свободную группу со счетным числом образующих.

**Задача 10.6.** Любое отображение  $\mathbb{R}P^2$  в себя имеет неподвижную точку.

**Задача 10.7.** При каких  $n$  существует свободное действие группы  $\mathbb{Z}/n$  на двумерной сфере?

**Задача 10.8\*.** Рассмотрим пространство  $M$  всех додекаэдров, вписанных в данную (двумерную) сферу.

а) Накройте  $M$  трехмерной сферой и опишите  $\pi_1(M)$ .

б) Докажите, что  $H_1(M)$  (т. е. фактор  $\pi_1(M)$  по ее коммутанту) — тривиальная группа.

(Таким образом  $M$  дает контрпример к исходной гипотезе Пуанкаре.)