19.05.2016
Лекция 13

Пучки и их когомологии

Один из двух примеров, ради которых создавалась аксиоматика абелевых категорий, – это пучки модулей на топологическом пространстве. Сегодня мы, наконец, обсудим категории пучков и некоторые функторы между ними.

Пусть X – топологическое пространство. Обозначим через $Top(X)$ категорию открытых множеств в X. *Предпучком* объектов категории $\mathcal{C}$ на X называется контравариантный функтор $Top(X) \to \mathcal{C}$. Иначе говоря, предпучок $\mathcal{F}$ – это семейство объектов $\mathcal{F}(U) \in \mathcal{C}$ для каждого открытого множества $U \subset X$ и семейство морфизмов ограничения $\rho_{UV} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ для каждой пары $V \subset U$, удовлетворяющее условиям $\rho_{UU} = 1$, $\rho_{VW}\rho_{UV} = \rho_{UW}$.

Примеры:

1. постоянный предпучок, связанный с объектом $M \in \mathcal{C}$: $\mathcal{F}(U) = M$ для всех U, $\rho_{UV} = 1_M$ для всех U и V;
2. предпучок функций со значением в фиксированном множестве M: $\mathcal{F}(U) = \mathrm{Hom}(U, M)$;
3. предпучок непрерывных функций на топологическом пространстве;
4. предпучок гладких функций на гладком многообразии;
5. предпучок дифференциальных k-форм на гладком многообразии;
6. предпучок гладких сечений векторного расслоения на на гладком многообразии.

Нас будут интересовать только предпучки со значениями в категории множеств с дополнительной структурой, например в категории абелевых групп или колец. Для предпучка множеств элементы $s \in \mathcal{F}(U)$ называются *сечениями* предпучка $\mathcal{F}$ над U. Обычно для $s \in \mathcal{F}(U)$ и $V \subset U$ вместо $\rho_{UV}(s)$ пишут $s|_V$. Множество $\mathcal{F}(X)$ называют множеством *глобальных сечений* и обозначают $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

Предпучок множеств $\mathcal{F}$ на X называется *пучком*, если для любого открытого покрытия $U = \cup U_i$ выполнены два условия:

1. если даны два сечения $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ такие, что $s_1|_{U_i} = s_2|_{U_i}$ при всех i, то $s_1 = s_2$;
2. если дан набор сечений $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ такой, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ при всех i, j, то существует сечение $s \in \mathcal{F}(U)$ такое, что $s|_{U_i} = s_i$.

Смысл этих условий в том, что сечения пучков можно задавать локально. Все приведённые примеры предпучков – пучки, кроме постоянного предпучка.

Задача 1. Покажите, что предпучок $\mathcal{F}$ модулей над кольцом R на X является пучком тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия $U = \cup_i U_i$ последовательность

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{s \mapsto (s|_{U_i})} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{(s_i) \mapsto ((s_i)|_{U_i \cup U_j} - (s_j)|_{U_i \cup U_j})} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

точна. При помощи этой последовательности можно задать условие пучка для предпучка со значениями в любой абелевой категории, содержащей все прямые суммы.

Морфизмом предпучков называется морфизм соответствующих функторов. То есть, морфизм $\phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ предпучков – это набор морфизмов $\phi(U) \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ такой, что $\rho^{\mathcal{G}}_{UV}\phi(U) = \phi(V)\rho^{\mathcal{F}}_{UV}$ при всех $V \subset U$.

По любому предпучку $\mathcal{F}$ строится ассоциированный с ним пучок $\mathcal{F}^+$ вместе с морфизмом $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, удовлетворяющий следующему универсальному свойству: любой морфизм из $\mathcal{F}$ в пучок пропускается единственным образом через $\mathcal{F}^+$. Иными словами, ассоциированный пучок – это сопряжённый слева функтор к тавтологическому функтору из пучков в предпучки.

Чтобы построить ассоциированный пучок, определим *слой* предпучка $\mathcal{F}$ в точке $x \in X$ как прямой предел $\mathcal{F}_x = \operatorname{inj}\lim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$. Элементы $\mathcal{F}_x$ называют *ростками*. Для любого сечения s предпучка над U определён его росток $s_x \in \mathcal{F}_x$ в любой точке $x \in U$. Пример: слой пучка гладких функций на гладком вещественном многообразии – это ростки гладких функций (а не просто $\mathbb{R}$ – то есть, слой пучка сечений расслоения не совпадает со слоем расслоения).

Для предпучка $\mathcal{F}$ пучок $\mathcal{F}^+$ определяется следующим образом: элемент $\mathcal{F}^+(U)$ – это семейство $(f_x \in \mathcal{F}_x)_{x \in U}$, локально задаваемое как набор ростков некоторого сечения. Т.е. семейство $(f_x \in \mathcal{F}_x)_{x \in U}$, для которого существует покрытие $U = \cup U_i$ и набор $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ такие, что $f_x = (s_i)_x$ при $x \in U_i$. Отображения ограничения и морфизм $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ определяются естественным образом.

Постоянным пучком множеств, связанным с множеством M, называется пучок, ассоциированный с постоянным предпучком, построенным по M.

Пусть $\mathcal{A}$ – аддитивная категория, тогда предпучки на X со значениями в $\mathcal{A}$ также образуют аддитивную категорию. Если $\mathcal{A}$ абелева, то и категория предпучков тоже будет абелева. Ядро и коядро морфизма $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ задаются формулами

$$(\ker \phi)(U) = \ker(\phi(U)), \qquad (\operatorname{coker} \phi)(U) = \operatorname{coker}(\phi(U)).$$

Задача 2. Пусть $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ – морфизм пучков абелевых групп. Покажите, что определённый выше предпучок $\ker \phi$ является пучком, а предпучок $\operatorname{coker} \phi$ – вообще говоря, нет.

Таким образом, для морфизма пучков ядро в категории предпучков будет ядром и в категории пучков. А чтобы построить коядро морфизма в категории пучков, необходимо рассмотреть пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \operatorname{coker}(\phi(U))$. Итак, категория пучков со значениями в абелевой категории также будет абелевой. В частности, абелевой будет категория $\mathcal{S}h_R(X)$ пучков модулей на X над фиксированным кольцом R. Необходимо также рассматривать более широкий класс абелевых категорий пучков, а именно пучки модулей над пучком колец.

Пусть $\mathcal{R}$ – пучок колец на топологическом пространстве X. Например, пучок функций определённого вида на многообразии или постоянный пучок, связанный с фиксированным кольцом. *Пучком модулей над* $\mathcal{R}$ называется пучок $\mathcal{F}$ на X такой, что всякое $\mathcal{F}(U)$ является $\mathcal{R}(U)$-модулем и действие $\mathcal{R}$ на $\mathcal{F}$ коммутирует с ограничениями. Всякий пучок модулей над пучком колец автоматически является пучком абелевых групп. *Морфизмом пучков модулей* называется такой морфизм пучков, который коммутирует с действием пучка колец. Также, как и пучки модулей над фиксированным кольцом, пучки модулей над пучком колец $\mathcal{R}$ образуют абелеву категорию $\mathcal{R}{-}\mathrm{mod}$.

Пример: пучок сечений векторного расслоения на гладком многообразии – это пучок модулей над пучком гладких функций.

Задача 3. Покажите, что последовательность пучков абелевых групп $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ точна $\Leftrightarrow$ для любого $x \in X$ точна последовательность слоев $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$.

Лемма 1. *Функтор глобальных сечений* $\Gamma\colon \mathcal{R}{-}\mathrm{mod} \to \mathcal{A}b$ *точен слева.*

Доказательство. Пусть $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ – точная тройка пучков $\mathcal{R}$-модулей. Тогда $\mathcal{F}$ изоморфен ядру $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$. По построению ядра, $\mathcal{F}(X) = \ker(\mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X))$, что и требуется доказать. □

Как мы увидим ниже, вообще говоря, функтор глобальных сечений не точен.

Задача 4. Пусть $\mathcal{F}_i$ – семейство пучков $\mathcal{R}$-модулей на X. a) Тогда предпучок $U \mapsto \prod_i \mathcal{F}_i(U)$ является пучком. Проверьте, что этот пучок – произведение в категории $\mathcal{R}-\mathrm{mod}$. b) Покажите, что предпучок $U \mapsto \oplus_i \mathcal{F}_i(U)$, вообще говоря, не будет пучком. Покажите, что ассоциированный с ним пучок будет прямой суммой в категории $\mathcal{R}-\mathrm{mod}$.

Естественный для гомологической алгебры вопрос – как обстоит дело с проективными/инъективными объектами в различных категориях модулей?

Лемма 2. *Инъективных объектов в категории* $\mathcal{R}-\mathrm{mod}$ *достаточно много.*

Доказательство. Сначала построим достаточный запас инъективных пучков. Пусть $\mathcal{R}_x$ – слой пучка $\mathcal{R}$ в точке $x \in X$, это кольцо. Возьмём инъективный модуль I над $\mathcal{R}_x$ и определим пучок i_*I на X правилом $i_*I(U) = I$ при $x \in U$, $i_*I(U) = 0$ иначе. Очевидно, это будет пучок $\mathcal{R}$-модулей. Он будет инъективным, так как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, i_*I) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{F}_x, I)$, а функторы взятия слоя и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_x}(-, I)$ точны.

Теперь вложим произвольный пучок $\mathcal{F}$ в инъективный. Для каждой точки $x \in X$ рассмотрим вложение ростка $\mathcal{F}_x$ в инъективный $\mathcal{R}_x$-модуль I_x. Этому вложению соответствует морфизм $\mathcal{F} \to (i_x)_*I_x$. Возьмём прямое произведение таких морфизмов: $\mathcal{F} \to \prod_x (i_x)_*I_x$. Оно, очевидно, есть вложение (проверяется на слоях в каждой точке). Кроме того, прямое произведение инъективных объектов всегда инъективно, что доказывает лемму. □

С проективными объектами дело обстоит хуже. Возможны разные ситуации.

Пример. Пусть, $\mathcal{R}$ – пучок гладких функций на вещественном многообразии X. Тогда ситуация аналогична той, что имеется для модулей над кольцом. Структурный пучок $\mathcal{R}$ будет проективным: морфизмы из $\mathcal{R}$ в пучок $\mathcal{F}$ – это глобальные сечения $\mathcal{F}$. А функтор глобальных сечений на категории $\mathcal{R}$-модулей точен: это можно показать при помощи разбиения единицы. И при этом любой пучок $\mathcal{F}$ накрывается прямой суммой структурных пучков. Это следует из задачи:

Задача 5. Покажите, что в сделанных предположениях a) функтор глобальных сечений точен; b) для любого сечения $s \in \mathcal{F}(U)$ и точки $x \in U$ найдётся сечение $s' \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ такое, что $s = s'$ на подходящей окрестности $U' \ni x$. Следовательно, отображение $\Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{R} \to \mathcal{F}$ будет сюръективным.

В следующем примере ситуация совершенно другая.

Пример. Пусть $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ – комплексная проективная прямая, $\mathcal{R} = \mathcal{O}_X$ – пучок голоморфных функций. Тогда пучок $\mathcal{R}$ уже не будет проективным. Действительно, рассмотрим сюръективный морфизм $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_Q$, где $P, Q \in \mathbb{P}^1$ – различные точки. Морфизм глобальных сечений уже не будет сюръективным, так как $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathbb{C}$, $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_P \oplus \mathcal{O}_Q) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. А значит, функтор глобальных сечений не точен и $\mathcal{O}_X$ не проективен. Также не любой пучок накрывается прямой суммой $\mathcal{O}_X$: например, в пучок $\mathcal{O}_X(-1)$ нет гомоморфизмов из $\mathcal{O}_X$.

Теперь рассмотрим основные функторы на категории пучков модулей над кольцом и построим соответствующие производные функторы.

Как было сказано, **функтор глобальных сечений** $\Gamma\colon \mathcal{R}-\mathrm{mod} \to \mathcal{A}b$ точен слева. Определим когомологии пучка абелевых групп $\mathcal{F}$ как правые производные функторы от функтора глобальных сечений $\Gamma\colon \mathcal{S}h_{\mathcal{A}b}(X) \to \mathcal{A}b$. Обозначение: $H^i(X,\mathcal{F})$. Это же определение применяется и для пучка абелевых групп с дополнительными данными (например, пучка $\mathcal{R}$-модулей), хотя возможно и другое определение когомологий: как производных функторов на категории пучков $\mathcal{R}$-модулей. Ниже мы увидим, что эти определения эквивалентны.

Для этого понадобится понятие вялого предпучка: предпучок $\mathcal{F}$ называется *вялым (flabby)*, если для любого открытого $U \subset X$ отображение ограничения $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ сюръективно.

Примеры: постоянный предпучок вял. Постоянный пучок является вялым, если любые два непустых открытых подмножества X пересекаются. Если $F_x, x \in X,$ – набор множеств, то вялым будет пучок $U \mapsto \prod_{x\in U} F_x$.

Наша цель – показать, что когомологии можно вычислять при помощи вялых резольвент. А именно, мы покажем, что вялые пучки Γ-ацикличны. Отметим, что условие вялости пучка, в отличие от инъективности, не использует никакой дополнительной структуры на пучке, а зависит только отображений ограничения.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{R}$ – пучок колец на топологическом пространстве X. Тогда*

1. *инъективные пучки $\mathcal{R}$-модулей вялые;*
2. *для любой точной последовательности $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \to 0$ с вялым $\mathcal{F}$ последовательность глобальных сечений $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{f} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{g} \mathcal{H}(X) \to 0$ точна;*
3. *фактор вялого пучка по вялому подпучку вял;*
4. *вялые пучки ацикличны относительно функтора глобальных сечений.*

Доказательство. 1. Вложим заданный инъективный пучок $\mathcal{F}$ в инъективный пучок $\mathcal{F}_0$ так, как описано в доказательстве леммы 2. Очевидно, пучок $\mathcal{F}_0$ вял. При этом по свойству инъективного объекта $\mathcal{F}$ – прямое слагаемое в $\mathcal{F}_0$. Очевидно, что прямое слагаемое вялого пучка вялое.

2. Пусть $s \in \mathcal{H}(X)$ – сечение. Будем строить сечения $t \in \mathcal{G}(U)$ такие, что $g(t) = s|_U$, постепенно увеличивая U. База – пустое U. Далее, пусть $x \in X \setminus U$ – точка. Так как отображение g на ростках сюръективно, найдётся сечение $t' \in \mathcal{G}(V)$ на подходящей окрестности $V \ni x$ такое, что $g(t') = s|_V$. Мы хотим склеить t и t' в одно сечение на $U \cup V$. Заметим: для разности $t - t'$ на $U \cap V$ верно $g(t-t') = 0$, стало быть, существует сечение $r \in \mathcal{F}(U\cap V)$, для которого $f(r) = t - t'$. При этом $\mathcal{F}$ вял, и r можно продолжить на всё X, полученное сечение тоже назовём r. Склеивая сечения t и $t' + f(r)|_V$, получим сечение $t'' \in \mathcal{G}(U\cup V)$ такое, что $g(t'') = s|_{U\cup V}$. Тем самым, мы продолжили t на большее множество. Применяя трансфинитную индукцию, можно продолжить t на всё X.

3. Пусть последовательность $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \to 0$ точна, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ вялые. Пусть $s \in \mathcal{H}(U)$ – сечение. По пункту 2 найдётся сечение $t \in \mathcal{G}(U)$ такое, что $g(t) = s$. Продолжим t на всё X, получим сечение $t' \in \mathcal{G}(X)$, для которого $g(t')|_U = s$.

4. Надо проверить, что $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ при вялом $\mathcal{F}$ и $i > 0$. Вложим $\mathcal{F}$ в инъективный (и значит, вялый) $\mathcal{G}$ и рассмотрим точную тройку $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$, по пункту 3 $\mathcal{H}$ тоже вялый. Из длинной точной последовательности когомологий получаем, что $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$ и $H^i(X,\mathcal{F}) = H^{i-1}(X,\mathcal{H})$ при $i > 1$. Рассуждения по индукции доказывают лемму. □

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{F}$ – пучок абелевых групп на X, $\mathcal{F}^\bullet$ – его вялая резольвента. Тогда естественные отображения $H^i(\Gamma(\mathcal{F}^\bullet)) \to H^i(X,\mathcal{F})$ – изоморфизмы.*

Доказательство. Следует из того, что вялые модули Γ-ацикличны, а производные функторы можно вычислять при помощи ацикличных резольвент. □

Предложение 5. *Пусть* $\mathcal{R}$ *– пучок колец на топологическом пространстве* X*, а* $\mathcal{F}$ *– пучок* $\mathcal{R}$*-модулей. Тогда правые производные функторы от* $\Gamma\colon \mathcal{R}\mathrm{-mod} \to \mathcal{A}b$ *для* $\mathcal{F}$ *изоморфны когомологиям* $\mathcal{F}$*.*

Доказательство. По определению, производные функторы от $\Gamma\colon \mathcal{R}\mathrm{-mod} \to \mathcal{A}b$ вычисляются при помощи инъективной резольвенты $\mathcal{F}$ в категории $\mathcal{R}$-модулей. А именно $R^i\Gamma(X,\mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(\Gamma(I^\bullet(\mathcal{F})))$, где $I^\bullet$ – упомянутая инъективная резольвента. По доказанному, I^i являются вялыми пучками, и утверждение вытекает из следствия 4. □

Пусть $i\colon U \to X$ – вложение открытого множества, $\mathcal{F}$ – пучок на X. Тогда определим пучок $\mathcal{F}|_U$ на U, положив $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ для любого открытого $V \subset U$. Несложно видеть, что $\mathcal{F}|_U$ действительно будет пучком, его также обозначают $i^*\mathcal{F}$. Тем самым, определён **функтор ограничения** $i^*\colon \mathcal{S}h(X) \to \mathcal{S}h(U)$, он, очевидно, точен. Ясно также, что ограничение задаёт функтор $\mathcal{R}\mathrm{-mod} \to \mathcal{R}|_U\mathrm{-mod}$.

Пусть $i\colon U \to X$ – вложение открытого множества, $\mathcal{F}$ – пучок на U. Определим $i_!\mathcal{F}$ как пучок на X, ассоциированный с предпучком $V \mapsto \mathcal{F}(V)$ при $V \subset U$, $V \mapsto 0$ иначе. Получим **функтор** $i_!\colon \mathcal{S}h(U) \to \mathcal{S}h(X)$ **продолжения нулем вне** U.

Задача 6. Проверьте, что a) $(i_!\mathcal{F})|_U = \mathcal{F}$. b) функтор $i_!$ сопряжён слева к i^*. c) $(i_!\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x$ при $x \in U$, $(i_!\mathcal{F})_x = 0$ иначе. d) функтор $i_!$ точен.

Задача 7. Пусть на X имеется пучок колец $\mathcal{R}$. Покажите, что ограничение задаёт функтор $\mathcal{R}\mathrm{-mod} \to \mathcal{R}|_U\mathrm{-mod}$, а продолжение нулём – функтор $i_!\colon \mathcal{R}|_U\mathrm{-mod} \to \mathcal{R}\mathrm{-mod}$.