12.05.2016
Лекция 12

Производный функтор

Сегодняшняя наша цель – по функтору между абелевыми категориями построить функтор на производных категориях, обладающий хорошими свойствами. В частности, производный функтор будет содержать в себе информацию о всех классических производных функторах.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – абелевы категории, а $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – аддитивный функтор. Почленное применение F задаёт функтор $\mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Kom}(\mathcal{B})$. Кроме того, почленное применение F переводит гомотопные морфизмы в гомотопные, а значит, задаёт функтор $\mathrm{K}(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}(\mathcal{B})$ на гомотопических категориях. Эти функторы мы также обозначим через F.

Естественное пожелание к функтору $\mathcal{D}F$ на производных категориях такое: включаться в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"] & \mathrm{Kom}(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q"] \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) \arrow[r, dashed, "\mathcal{D}F"] & \mathcal{D}(\mathcal{B}). \end{tikzcd} \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что для точного F такой $\mathcal{D}F$ существует. Действительно, $QF\colon \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ переводит квазиизоморфизмы в изоморфизмы и поэтому пропускается через $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Однако для функтора F, не являющегося точным, такого $\mathcal{D}F$ существовать не может. Действительно, почленное применение F к двум квазиизоморфным комплексам (т.е. изоморфным в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ объектам) должно давать изоморфные объекты (т.е. квазиизоморфные комплексы). Но для не точного F существует комплекс $0 \to K \to L \to M \to 0$, квазиизоморфный нулю и такой, что комплекс $0 \to F(K) \to F(L) \to F(M) \to 0$ уже не будет квазиизоморфен нулю.

Всё, что можно пытаться сделать, – это построить приближения к функтору $\mathcal{D}F$, замыкающему диаграмму. Как обычно, можно рассматривать два случая – приближения слева и справа. Мы предположим, что F точен справа, и будем строить приближения слева. Идея остаётся той же, что и при построении классических производных функторов, – надо применять функтор F не ко всем комплексам, а только к комплексам специального вида.

Предположим, что в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. В этом случае естественно рассмотреть ограниченную справа производную категорию – тогда у любого объекта будет проективная резольвента. Более того, она функториальна на производной категории.

Лемма 1. *Пусть в абелевой категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда сопоставление комплексу его проективной резольвенты задаёт функтор*

$$P\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}^-(\mathrm{Proj}\mathcal{A}).$$

Доказательство. Как мы видели раньше, композиция естественных функторов

$$\mathrm{K}^-(\mathrm{Proj}\mathcal{A}) \to \mathrm{K}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$$

является эквивалентностью. Сопоставление комплексу проективной резольвенты — любой обратной функтор к этой эквивалентности. Неоднозначность в выборе обратного функтора состоит в том, что резольвенту для каждого комплекса можно выбрать разную. После этого на морфимзах он будет определён уже однозначно. □

Теперь можно определить производный функтор $LF\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ на производных категориях как композицию трёх функторов:

$$\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \xrightarrow{P} \mathrm{K}^-(\mathrm{Proj}\mathcal{A}) \xrightarrow{F} K^-(\mathcal{B}) \xrightarrow{Q} D^-(\mathcal{B}).$$

Иными словами, положим

$$LF(K^\bullet) = F(P(K)^\bullet),$$

где $P(K)^\bullet$ – фиксированная проективная резольвента $K^\bullet$. Построенный функтор $LF\colon D^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ называется *левым производным функтором* от F.

Чем же хорош производный функтор? Во-первых, с его помощью можно вычислять классические производные функторы:

Предложение 2. *Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – точный справа функтор, а в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда*

$$L_iF(M) = H_i(LF(M[0])).$$

Доказательство. Очевидно. $\square$

Отметим, что производный функтор несёт больше информации, чем набор классических производных функторов: комплекс $LF(M[0])$ не определятся, вообще говоря, набором своих когомологий.

Во-вторых, имеется аналог длинной точной последовательности производных функторов. Точнее говоря, левый производный функтор от точного справа функтора на абелевых категориях становится точным функтором на производных категориях.

Точным функтором между триангулированными категориями называется аддитивный функтор $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ вместе с фиксированным изоморфизмом $\varepsilon\colon F \circ [1]_{\mathcal{T}} \to [1]_{\mathcal{S}} \circ F$ такой, что для любого выделенного треугольника

$$X \to Y \to Z \xrightarrow{h} X[1]_{\mathcal{T}}$$

в $\mathcal{T}$ треугольник

$$F(X) \to F(Y) \to F(Z) \xrightarrow{h'} F(X)[1]_{\mathcal{S}}$$

выделен в $\mathcal{S}$, где морфизм h' есть композиция $F(Z) \xrightarrow{F(h)} F(X[1]_{\mathcal{T}}) \xrightarrow{\varepsilon(X)} F(X)[1]_{\mathcal{S}}$. Говоря проще, точный функтор – это функтор, сохраняющий сдвиг и выделенные треугольники.

Уже известные нам примеры точных функторов между триангулированными категориями – это локализация $Q\colon \mathrm{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а также любая локализация триангулированной категории по классу морфизмов, удовлетворяющему условиям прошлой лекции. Кроме того, точным будет функтор между гомотопическими категориями $F\colon \mathrm{K}(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}(\mathcal{B})$, построенный выше. Ясно также, что композиция точных функторов точна. Примеры разумных, но не точных функторов – это функторы левого и правого обрезания комплексов.

Предложение 3. *Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – точный справа функтор, а в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда производный функтор $LF\colon D^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ точный.*

Доказательство. Достаточно проверить, что функтор P взятия проективной резольвенты точен. Полезно применить небольшую хитрость: в определении производного функтора выбрать проективные резольвенты так, чтобы у комплексов, отличающихся на сдвиг, резольвенты также отличались бы на сдвиг. Тогда функтор P будет в точности коммутировать с функтором сдвига, и в качестве ε возьмём тождественный морфизм. Теперь покажем, что P переводит выделенные треугольники в выделенные, достаточно это сделать для стандартных треугольников вида $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \to C(f) \to K[1]^\bullet$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
P(K)^\bullet \arrow[r, "P(f)"] \arrow[d, "p(K)"] & P(L)^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "p(L)"] & C(P(f)) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "w"] & P(K)[1]^\bullet \arrow[d, "p(K)[1]"] \\
K^\bullet \arrow[r, "f"] & L^\bullet \arrow[r] & C(f) \arrow[r] & K[1]^\bullet \\
P(K)^\bullet \arrow[r, "P(f)"] \arrow[u, "p(K)"] & P(L)^\bullet \arrow[r] \arrow[u, "p(L)"] & P(C(f)) \arrow[r] \arrow[u, "p(C(f))"] & P(K)[1]^\bullet. \arrow[u, "p(K)[1]"]
\end{tikzcd}$$

В ней верхняя строка – выделенный треугольник по определению, а морфизм w строится по аксиоме TR3, причём является квазиизоморфизмом по доказанному. Диаграмма показывает, что верхняя и нижняя строки изоморфны в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. А значит, они изоморфны и в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, так как все шесть в них входящих комплексов – ограниченные справа проективные, а функтор $\mathrm{K}^-(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ строго полон. Получили, что нижняя строка изоморфна в $\mathrm{K}^-(\mathcal{A})$ выделенному треугольнику и следовательно, тоже выделена. $\square$

Напомним следующий факт: любую точную тройку комплексов $0 \to K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \to 0$ можно дополнить до выделенного треугольника в производной категории. Из предложения 3 и этого факта вытекает существование длинной точной последовательности производных функторов. Действительно, если $0 \to K \to L \to M \to 0$ – точная тройка, то имеются выделенные треугольники $K[0] \to L[0] \to M[0] \to K[1]$ и $LF(K[0]) \to LF(L[0]) \to LF(M[0]) \to LF(K[1])$. Переходя в последнем к когомологиям, получаем длинную точную последовательность классических производных функторов.

В некоторых случаях производный функтор можно определить и между ограниченными производными категориями. Говорят, что точный справа функтор $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ имеет *когомологическую размерность* n, если $n = \max\{k \mid L_kF \neq 0\}$.

Задача 1. Покажите, что ограничение $LF\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ на $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ принимает значения в $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ в каждом из следующих случаев:

- если категория $\mathcal{A}$ имеет конечную глобальную размерность;
- если функтор F имеет конечную когомологическую размерность.

Тем самым, при указанных условиях имеем левый производный функтор $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$.

Как мы говорили, левый производный функтор – это приближение к (несуществующему) функтору $\mathcal{D}F$, делающему коммутативной диаграмму (1). Наша цель – объяснить, что именно это значит, и тем самым дать абстрактное определение производного функтора. Ниже мы покажем, что построенный нами производный функтор – пример достаточно общей конструкции локализации функтора. Для этого понадобится ещё немного изучить триангулированные категории.

Пусть $\mathcal{T}$ – триангулированная категория. Полная подкатегория $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ называется *триангулированной подкатегорией*, если она инвариантна относительно сдвигов [1] и [−1], а также взятия конусов: любой морфизм $X \to Y$ в $\mathcal{T}$, для которого X и Y лежат в $\mathcal{S}$, можно дополнить до выделенного треугольника, у которого третья вершина Z лежит в $\mathcal{S}$.

Примеры: $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ – триангулированная подкатегория в $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ и в $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$, а $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ – триангулированные подкатегории в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Подкатегория $\mathrm{K}(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}))$ триангулированная в $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Для триангулированных категорий, помимо локализации, есть естественное понятие факторизации. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ – строгая (т.е. замкнутая относительно изоморфизмов) триангулированная подкатегория. Определим фактор $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ как решение универсальной задачи. А именно, как точный функтор $Q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$, такой что $Q(\mathcal{N}) = 0$, и что любой другой точный функтор $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, для которого $F(\mathcal{N}) = 0$, пропускается единственным образом через функтор $F'\colon \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$. Из определения следует, что факторкатегория, если существует, единственна.

Покажем, что при сделанных предположениях факторкатегория всегда существует. Для этого определим класс морфизмов S в $\mathcal{T}$: морфизм $f \in S \Leftrightarrow$ конус f лежит в $\mathcal{N}$. В интересующем нас примере $\mathcal{N}$ – подкатегория ацикличных комплексов, а S – класс квазиизоморфизмов. Для точного функтора $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ условия “$F(\mathcal{N}) = 0$” и “$F(S)$ – изоморфизмы” равносильны. Поэтому локализация $\mathcal{T}$ по S является факторкатегорией $\mathcal{T}$ по $\mathcal{N}$. То, что $\mathcal{T}[S^{-1}]$ триангулированная, вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Класс S удовлетворяет условиям Оре и условиям согласованности с триангулированной структурой из прошлой лекции.*

Доказательство. То, что S замкнуто относительно композиции, следует из аксиомы октаэдра. Остальные условия Оре проверяются точно так же, как для случая квазиизоморфизмов.

Инвариантность S относительно сдвигов очевидна. Второе условие согласованности S с триангулированной структурой также проверяется при помощи аксиомы октаэдра. □

Пусть $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ – точный функтор, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ – строгая триангулированная подкатегория. Если $F(\mathcal{N}) = 0$, то F единственным образом пропускается через факторкатегорию $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ (по определению): существует функтор $F'\colon \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ такой, что $F \cong F'Q$. В общем случае такого F' существовать не может, приближение к нему называется локализацией функтора. *Левой локализацией функтора F относительно подкатегории $\mathcal{N}$* называется точный функтор $LF\colon \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ вместе с заданным морфизмом функторов $\lambda\colon LF \circ Q \to F$, удовлетворяющим универсальному свойству: для любого точного функтора $G\colon \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ и морфизма функторов $\lambda'\colon G \circ Q \to F$ существует единственный морфизм $\phi\colon G \to LF$ такой, что $\lambda' = \lambda \circ (\phi Q)$.

Несложно видеть, что задание точного функтора $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ вида $G \circ Q$ равносильно заданию точного функтора $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, обращающегося в ноль на $\mathcal{N}$. А задание морфизма функторов $G_1 \circ Q \to G_2 \circ Q$ такого вида равносильно заданию морфизма $G_1 \to G_2$. Поэтому универсальное свойство, определяющее локализацию, можно неформально выразить так: локализация – ближайший слева к F функтор, переводящий $\mathcal{N}$ в ноль. В частности, если $F(\mathcal{N}) = 0$, то локализацией служит индуцированный функтор F' на факторкатегории.

Предложение 5. *Пусть $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ – точный функтор, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ – строгая триангулированная подкатегория. Предположим, что вложение $\mathcal{N} \to \mathcal{T}$ имеет левый сопряжённый функтор. Тогда F имеет левую локализацию.*

Перед доказательством нужно понять, что означает условие о существовании у вложения сопряжённого функтора. Дадим ещё несколько определений.

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ – подкатегория. *Правым ортогоналом* к $\mathcal{U}$ называется полная подкатегория $\mathcal{U}^\perp \subset \mathcal{T}$, образованная объектами $X \in \mathcal{T}$, для которых $\mathrm{Hom}(U, X[i]) = 0$ при всех $U \in \mathcal{U}$ и $i \in \mathbb{Z}$. Аналогично определяется ${}^\perp\mathcal{U}$ – *левый ортогонал* к $\mathcal{U}$. Несложно убедиться в том, что ортогонал – триангулированная подкатегория, замкнутая относительно изоморфизмов.

12.05.2016
Лекция 12

Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ – две подкатегории в $\mathcal{T}$ такие, что $\mathrm{Hom}(V, U) = 0$ для любых $U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}$. Пусть для любого $X \in \mathcal{T}$ существует выделенный треугольник $V \to X \to U \to V[1]$, у которого $U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}$. Тогда говорят, что имеется *полуортогональное разложение* $\mathcal{T} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle$.

Основной для нас пример полуортогонального разложения – следующий. Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория, где достаточно много проективных объектов. Тогда из доказанного ранее следует, что имеется полуортогональное разложение

$$\mathrm{K}^-(\mathcal{A}) = \langle Acycl^-(\mathcal{A}), \mathrm{K}^-(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})) \rangle,$$

где $Acycl^-(\mathcal{A})$ обозначает полную подкатегорию, состоящую из ацикличных ограниченных справа комплексов.

Также мы видели, что имеются полуортогональные разложения (компоненты которых не триангулированны)

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{D}_{\geqslant n+1}(\mathcal{A}), \mathcal{D}_{\leqslant n}(\mathcal{A}) \rangle.$$

Лемма 6. *Пусть дано полуортогональное разложение $\mathcal{T} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle$ на триангулированные подкатегории. Тогда*

1. *разложение $V \to X \to U \to V[1]$ единственно для любого объекта $X \in \mathcal{T}$;*
2. *соответствия $X \mapsto U$ и $X \mapsto V$ являются точными функторами, обозначим их $u^* \colon \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ и $v_* \colon \mathcal{T} \to \mathcal{V}$;*
3. *функтор u^* сопряжён слева к функтору вложения $\mathcal{U} \to \mathcal{T}$, а v_* сопряжён справа ко вложению $\mathcal{V} \to \mathcal{T}$.*

Верно и обратное:

Лемма 7. *Пусть $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ – триангулированная подкатегория, для которой функтор вложения и имеет левый сопряжённый. Тогда имеется полуортогональное разложение $\mathcal{T} = \langle \mathcal{U}, {}^{\perp}\mathcal{U} \rangle$. Аналогичное верно для подкатегории, вложение которой имеет правый сопряжённый функтор.*

Задача 2. Докажите эти леммы.

Доказательство предложения 5. Пусть $\mathcal{P} = {}^{\perp}\mathcal{N}$ – левый ортогонал к $\mathcal{N}$. Имеем полуортогональное разложение $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}, \mathcal{P} \rangle$. Обозначим вложение $\mathcal{P} \to \mathcal{T}$ через β, а правый сопряжённый к нему функтор через β_*. Пусть $\varepsilon \colon \beta\beta_* \to 1_{\mathcal{T}}$ – коединица сопряжения. Определим морфизм функторов $\bar{F} = F\beta\beta_* \to F$ как $F\varepsilon$. Так как $\beta_*\mathcal{N} = 0$, то $\bar{F}(\mathcal{N}) = 0$. Значит функтор $\bar{F}$ имеет вид $LF \circ Q$, где $LF \colon \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ – некоторый точный функтор. Тем самым морфизм $\lambda \colon LF \circ Q \to F$ построен. Покажем, что LF – локализация. Пусть задан морфизм функторов $\lambda' \colon G \circ Q \to F$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
GQ \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[dr, dashed] & F & \\
GQ\beta\beta_* \arrow[u, Rightarrow, "GQ\varepsilon"] \arrow[r, "\lambda'\beta\beta_*"] & F\beta\beta_* \arrow[u, "F\varepsilon"'] \arrow[r, equal] & LF \circ Q.
\end{tikzcd}$$

В ней $GQ\varepsilon$ – изоморфизм функторов. Действительно, для любого объекта $X \in \mathcal{T}$ имеем выделенный треугольник $\beta\beta_*X \xrightarrow{\varepsilon(X)} X \to X' \to \beta\beta_*X[1]$, где $X' \in \mathcal{N}$, применяя GQ, получаем, что $GQ(X') = 0$ и $GQ\varepsilon(X)$ – изоморфизм. Получаем существование (единственного) морфизма $GQ \to LF \circ Q$, который очевидно имеет вид ϕQ, где $\phi \colon G \to LF$ – некоторый морфизм. $\square$

Следствие 8. *Пусть* $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *– точный справа функтор, а в* $\mathcal{A}$ *достаточно много проективных объектов. Обозначим локализации* $\mathrm{K}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ *и* $\mathrm{K}^-(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ *через* Q. *Тогда для производного функтора* $LF\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ *имеется морфизм функторов* $LF \circ Q \to QF$ *и выполнено универсальное свойство: для любого точного функтора* $G\colon \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ *любой морфизм функторов* $GQ \to QF$ *единственным образом пропускается через морфизм функторов* $G \to LF$.

Доказательство. Это – частный случай предыдущего предложения. Пусть $\mathcal{T} = \mathrm{K}^-(\mathcal{A})$, $\mathcal{T}' = \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$, в качестве $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ возьмём композицию QF. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ – полная строгая подкатегория, образованная ацикличными комплексами. Факторкатегория $\mathcal{T}$ по $\mathcal{N}$ – это в точности локализация $\mathcal{T}$ по квазиизоморфизмам, т.е. $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$. Имеется полуортогональное разложение $\mathrm{K}^-(\mathcal{A}) = \langle Acycl^-(\mathcal{A}), K^-(\mathrm{Proj}(\mathcal{A}))\rangle$, и следовательно вложение $\mathcal{N}$ имеет левый сопряжённый функтор. Ортогональная подкатегория $\mathcal{P} =^{\perp} \mathcal{N}$ – это подкатегория комплексов с проективными членами. Сопряжённый функтор β_* – сопоставление комплексу $K^\bullet$ его проективной резольвенты $P(K)^\bullet$, а коединица сопряжения – соответствующий морфизм $P(K)^\bullet \to K^\bullet$. Поэтому локализация, построенная в доказательстве предложения 5, совпадает с производным функтором LF, как он был определён нами раньше. А значит, LF является локализацией функтора и удовлетворяет универсальному свойству. □