

Треугольники и триангулированные категории

Гомотопическая и производная категории от абелевой категории, как правило, абелевыми уже не будут – в них слишком мало инъективных и сюръективных морфизмов. Ядра и коядра существуют только у расщепимых морфизмов. Таким образом, в гомотопической и производной категории понятие точной тройки довольно бесполезно. Его заменой служит понятие выделенного треугольника. А аксиоматизация свойств таких треугольников приводит к определению триангулированной категории (хотя исторически триангулированные категории появились совсем в другом контексте, в топологии).

По определению, треугольник – это диаграмма комплексов $K^\bullet \rightarrow L^\bullet \rightarrow M^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet$, морфизм треугольников – коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} K^\bullet & \longrightarrow & L^\bullet & \longrightarrow & M^\bullet & \longrightarrow & K[1]^\bullet \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow u[1] \\ K'^\bullet & \longrightarrow & L'^\bullet & \longrightarrow & M'^\bullet & \longrightarrow & K'[1]^\bullet. \end{array}$$

Выделенный треугольник в гомотопической категории – это треугольник, изоморфный треугольнику вида $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \rightarrow C(f)^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet$, связанному с морфизмом комплексов $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$. Установим несколько свойств выделенных треугольников в гомотопической категории.

Задача 1. Пусть $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$ – выделенный треугольник. Проверьте, что треугольники

$$\begin{array}{ccc} K^\bullet \xrightarrow{-f} L^\bullet \xrightarrow{-g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet, & K^\bullet \xrightarrow{-f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{-h} K[1]^\bullet, \\ K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]} L[1]^\bullet \xrightarrow{-g[1]} M[1]^\bullet \xrightarrow{-h[1]} K[2]^\bullet \end{array}$$

выделены.

Следующее свойство треугольников менее ожидаемо

Предложение 1. *Треугольник*

$$(1) \quad K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$$

выделен тогда и только тогда, когда выделен треугольник

$$(2) \quad L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet \xrightarrow{-f[1]} L[1]^\bullet.$$

Для доказательства нам понадобится понятие цилиндра морфизма. Пусть $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ – морфизм комплексов. Рассмотрим диаграмму $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{u} C(f)^\bullet \xrightarrow{v} K[1]^\bullet$, где $u: L^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet \oplus L^\bullet$ и $v: K[1]^\bullet \oplus L^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet$ – канонические морфизмы: $u(l) = (0, l)$, $v(k, l) = k$. Определим *цилиндр* f как комплекс $Cyl(f) = C(-v[-1])$, где $-v[-1]: C(f)[-1]^\bullet \rightarrow K^\bullet$. Более явно цилиндр определяется так:

$$Cyl(f)^n = K^{n+1} \oplus L^n \oplus K^n, \quad d_{Cyl}(k^{n+1}, l^n, k^n) = (-dk^{n+1}, dl^n + f(k^{n+1}), dk^n - k^{n+1}).$$

Лемма 2. *Треугольник $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{u} C(f)^\bullet \xrightarrow{v} K[1]^\bullet$ изоморфен в гомотопической категории треугольнику $K^\bullet \xrightarrow{f'} Cyl(f)^\bullet \xrightarrow{u'} C(f)^\bullet \xrightarrow{v} K[1]^\bullet$.*

Доказательство. Определим отображения

$$\alpha: L^\bullet \rightarrow \text{Cyl}(f)^\bullet, \quad \alpha(l) = (0, l, 0)$$

$$\beta: \text{Cyl}(f)^\bullet \rightarrow L^\bullet, \quad \beta(k, l, k') = l + f(k').$$

Проверки показывают, что: α и β – морфизмы комплексов, $\beta f' = f$, $u' \alpha = u$, $\beta \alpha = 1_{L^\bullet}$. Кроме того, $\alpha \beta$ гомотопна $1_{\text{Cyl}(f)^\bullet}$, гомотопии задаются формулой $h(k, l, k') = (k', 0, 0)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \alpha \beta(k, l, k') &= (0, l + f(k'), 0), & (\alpha \beta - 1)(k, l, k') &= (-k, f(k'), -k'), \\ hd(k, l, k') &= (dk' - k, 0, 0), & dh(k, l, k') &= (-dk', f(k'), -k'), \\ (hd + dh)(k, l, k') &= (-k, f(k'), -k'). \end{aligned}$$

Следовательно, α и β – изоморфизмы в $K(\mathcal{A})$, отсюда же следует, что в гомотопической категории $\alpha f = f'$ и $u \beta = u'$. Значит, треугольники из условия изоморфны в $K(\mathcal{A})$. \square

Доказательство предложения 1. Пусть треугольник (2) выделен, тогда он изоморфен треугольнику

$X^\bullet \xrightarrow{p} Y^\bullet \xrightarrow{q} C(p)^\bullet \xrightarrow{r} X[1]^\bullet$, который изоморфен $X^\bullet \xrightarrow{p'} \text{Cyl}(p)^\bullet \xrightarrow{q'} C(p)^\bullet \xrightarrow{r} X[1]^\bullet$ по лемме 1. А треугольник (1) тогда изоморфен треугольнику $C(p)[-1]^\bullet \xrightarrow{-r[-1]} X^\bullet \xrightarrow{p'} \text{Cyl}(p)^\bullet \xrightarrow{q'} C(p)^\bullet$. Этот треугольник – стандартный по определению цилиндра, значит (1) – выделенный.

Обратно, пусть (1) выделенный. Тогда по доказанному, выделенными будут треугольники $M[-1]^\bullet \xrightarrow{-h[-1]} K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet$ и $L[-1]^\bullet \xrightarrow{-g[-1]} M[-1]^\bullet \xrightarrow{-h[-1]} K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet$. Согласно задаче 2, треугольник (2) тоже выделенный. \square

Можно определять выделенные треугольники несколько иначе. Несложно проверить, что точная тройка комплексов

$$(3) \quad 0 \rightarrow K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \rightarrow 0.$$

почленно расщепима $\Leftrightarrow L^n \cong K^n \oplus M^n$ и дифференциал в $K^n \oplus M^n$ задаётся формулой $d(k, m) = (dk + h(m), dm)$, где $h: M[-1]^\bullet \rightarrow K^\bullet$ – морфизм комплексов. Такая тройка изоморфна тройке $0 \rightarrow K^\bullet \rightarrow C(h)^\bullet \rightarrow M^\bullet \rightarrow 0$. Заметим, что морфизм $h: M[-1]^\bullet \rightarrow K^\bullet$ при этом задаётся формулой $h = f^{-1} d_L g^{-1}$.

Задача 2. Пусть тройка (3) почленно расщепима. Дополним её до треугольника при помощи морфизма $-h[1]: M^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet$. Покажите, что полученный треугольник $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{-h[1]} K[1]^\bullet$ выделенный и все выделенные треугольники изоморфны треугольнику такого вида.

Выделенные треугольники играют в гомотопической категории ту же роль, что в категории комплексов играют точные тройки комплексов. А именно, по выделенному треугольнику строится длинная точная последовательность когомологий.

Предложение 3. Пусть

$$K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$$

– выделенный треугольник в $K(\mathcal{A})$. Тогда длинная последовательность

$$\dots \rightarrow H^i(K^\bullet) \rightarrow H^i(L^\bullet) \rightarrow H^i(M^\bullet) \xrightarrow{H^i(h)} H^i(K[1]^\bullet) = H^{i+1}(K^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(L^\bullet) \rightarrow \dots$$

точна.

Доказательство. Изоморфным треугольникам соответствуют изоморфные длинные последовательности. Поэтому достаточно доказать точность для стандартного треугольника $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$, где $h = -f^{-1}d_L g^{-1}$, связанного с расщепимой точной тройкой. Граничные отображения $H^i(M^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(K^\bullet)$ с точностью до знака совпадают с отображениями, индуцированными морфизмом $M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$, поэтому длинная последовательность совпадает с точностью до знаков с той, точность которой была доказана на первой лекции. \square

Предложение 4. Пусть

$$K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet$$

– выделенный треугольник в $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Тогда длинная последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, K[i]^\bullet) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, L[i]^\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, M[i]^\bullet) \xrightarrow{h \circ -} \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, K[i+1]^\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, L[i+1]^\bullet) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

точна.

Для стандартных выделенных треугольников мы уже доказывали это утверждение, а общий случай сводится к случаю стандартного треугольника. Ниже мы получим ещё одно доказательство, работающее в общем контексте триангулированной категории.

Пусть на категории \mathcal{T} задан автоморфизм $[1]: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ (более правильно говорить “автоэквивалентность”, но в случае категории комплексов это в действительности автоморфизм, что упрощает формулировки). *Треугольником* в \mathcal{T} называется диаграмма вида $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$. *Триангулированной категорией* называется категория \mathcal{T} с автоморфизмом $[1]$ (он называется *функтором сдвига*), в которой выделен класс треугольников, удовлетворяющий следующим аксиомам:

- TR1. (a) Треугольник $X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ выделен;
 (b) Треугольник, изоморфный выделенному, выделен;
 (c) Любой морфизм $f: X \rightarrow Y$ можно дополнить до выделенного треугольника $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$.

- TR2. Треугольник $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ выделен тогда и только тогда, когда выделен треугольник $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$.

- TR3. Пусть строки диаграммы

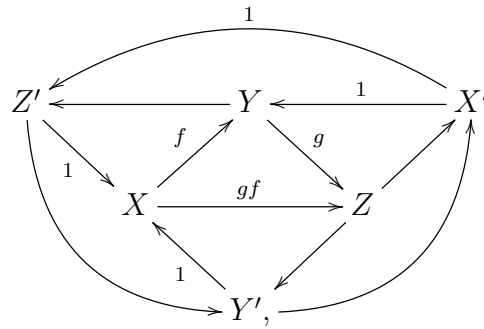
$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow u[1] \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1]. \end{array}$$

– выделенные треугольники, и заданы морфизмы u и v такие, что $vf = f'u$. Тогда существует морфизм w , делающий диаграмму коммутативной.

- TR4. Любая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ X & & Z \end{array}$$

дополняется до коммутативной диаграммы



в которой стрелка с пометкой 1 из A в B обозначает морфизм из A в $B[1]$, а треугольники с вершинами (X, Y, Z') , (Y, Z, X') , (X, Z, Y') и (Z', Y', X') – выделенные. Заметим, что коммутативность этой диаграммы включает в себя то, что два возможных морфизма из Y в Y' и из Y' в $Y[1]$ равны.

Сделаем несколько замечаний относительно аксиом.

Объект Z из аксиомы TR1c, дополняющий морфизм f до выделенного треугольника, естественно назвать конусом f . Как мы ниже увидим, конус определён однозначно с точностью до изоморфизма. Аксиома TR3 утверждает, что морфизму в категории стрелок соответствует морфизм конусов этих стрелок. Однако, из аксиом не следует, что это соответствие является функтором – морфизм между конусами в аксиоме TR3 определён не однозначно. Это обстоятельство – один из недостатков аксиоматики триангулированных категорий.

Из аксиомы TR2 следует, что по всякому треугольнику $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ можно построить бесконечную последовательность

$$\dots \rightarrow Z[-1] \xrightarrow{-h[-1]} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1] \xrightarrow{-g[1]} Z[1] \xrightarrow{-h[1]} X[2] \xrightarrow{f[2]} \dots,$$

в которой любой фрагмент длины 3 – выделенный треугольник. Тем самым, вершины треугольника равноправны.

Аксиома TR4 называется аксиомой октаэдра. Несмотря на кажущуюся громоздкость, её смысл можно выразить одной фразой:

конус композиции морфизмов есть конус морфизма между конусами этих морфизмов. Диаграмма октаэдра из формулировки этой аксиомы строится автоматически, за исключением двух стрелок $Z' \rightarrow Y'$ и $Y' \rightarrow X'$, свойства которых и постулируются.

Некоторые свойства выделенных треугольников собраны в следующем предложении.

Предложение 5. Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ – выделенный треугольник. Тогда

1. Композиции $gf, hg, f[1]h$ равны нулю.
2. Если U – произвольный объект, то имеются точные последовательности

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(U, Z[-1]) \rightarrow \text{Hom}(U, X) \rightarrow \text{Hom}(U, Y) \rightarrow \text{Hom}(U, Z) \rightarrow \text{Hom}(U, X[1]) \rightarrow \dots$$

и

$$\text{Hom}(X[1], U) \rightarrow \text{Hom}(Z, U) \rightarrow \text{Hom}(Y, U) \rightarrow \text{Hom}(X, U) \rightarrow \text{Hom}(Z[-1], U) \rightarrow \dots$$

3. Если в аксиоме TR3 морфизмы u и v – изоморфизмы, то w – изоморфизм. Как следствие, любые два дополнения морфизма до выделенного треугольника изоморфны.

Доказательство. 1. Согласно аксиоме TR2, достаточно проверить, что $gf = 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{1_X} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow 1_X & & \downarrow f & & \downarrow \text{!} & & \downarrow 1_{X[1]} \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1]. \end{array}$$

По аксиоме TR3 существует морфизм $0 \rightarrow Z$ (нулевой), делающий её коммутативной. Это и значит, что $gf = 0$.

2. Проверим точность первой последовательности, из пункта 1 следует, что она – комплекс. Докажем, что он точен, согласно TR2, достаточно рассмотреть средний член. Пусть $u: U \rightarrow Y$ и $gu = 0$. Снова рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{1_U} & U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & U[1] \\ \downarrow v & & \downarrow u & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1]. \end{array}$$

В ней средний квадрат коммутативен по предположению, значит по TR3 найдётся v , для которого коммутативен левый квадрат, т.е. $u = fv$.

3. По лемме Йонеды, достаточно показать, что w индуцирует изоморфизмы на $\text{Hom}(U, -)$ при всех U . Применим $\text{Hom}(U, -)$ к диаграмме из TR3, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Hom}(U, X) & \xrightarrow{f} & \text{Hom}(U, Y) & \xrightarrow{g} & \text{Hom}(U, Z) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(U, X[1]) & \xrightarrow{f[1]} & \text{Hom}(U, Y[1]) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow u[1] & & \downarrow v[1] \\ \text{Hom}(U, X') & \xrightarrow{f'} & \text{Hom}(U, Y') & \xrightarrow{g'} & \text{Hom}(U, Z') & \xrightarrow{h'} & \text{Hom}(U, X'[1]) & \xrightarrow{f'[1]} & \text{Hom}(U, Y'[1]), \end{array}$$

в которой строки – точные последовательности по пункту 2, а все вертикальные стрелки, кроме средней, – изоморфизмы. Диаграммный поиск показывает, что и средняя стрелка будет изоморфизмом (этот факт носит название 5-леммы). \square

Функтор Hom , образующий длинную точную последовательность при применении к выделенному треугольнику, – пример когомологического функтора.

Когомологическим функтором на триангулированной категории \mathcal{T} называется (ковариантный) аддитивный функтор $H: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ со значениями в абелевой категории такой, что для любого выделенного треугольника

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow X[1]$$

последовательность

$$H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z)$$

точна.

Из аксиомы TR2 следует, что когомологический функтор определяет по любому выделенному треугольнику длинную точную последовательность

$$\dots \rightarrow H(Z[-1]) \rightarrow H(X) \rightarrow H(Y) \rightarrow H(Z) \rightarrow H(X[1]) \rightarrow \dots$$

Известные нам примеры когомологических функторов: функтор H^0 на гомотопической категории комплексов, функтор $\text{Hom}(U, -)$ из любой триангулированной категории в категорию $\mathcal{A}b$ абелевых групп, функтор $\text{Hom}(-, U)$ из триангулированной категории в $\mathcal{A}b^{op}$.

Теперь докажем основной факт сегодняшней лекции.

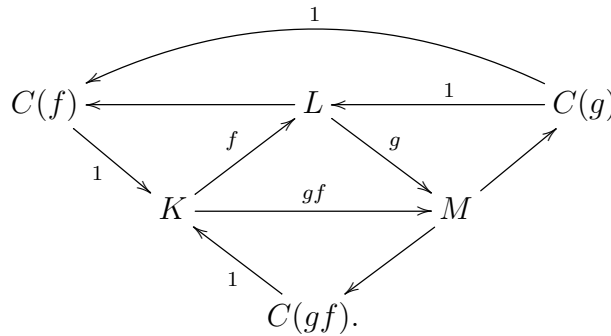
Предложение 6. Пусть \mathcal{A} – абелева категория, а $K^*(\mathcal{A})$ – одна из версий гомотопической категории комплексов над \mathcal{A} . Тогда категория $K^*(\mathcal{A})$ с определённым выше классом выделенных треугольников и обычным функтором сдвига комплексов триангулирована.

Доказательство. Аксиома TR1a выполнена по определению выделенных треугольников, TR1c очевидна. TR1b следует из того, что треугольник $0 \rightarrow X \xrightarrow{1_X} X \rightarrow 0$ выделенный, и аксиомы TR2. Аксиому TR2 мы уже доказали. Аксиому TR3 достаточно проверить для стандартных выделенных треугольников. Т.е., необходимо по коммутативной в $K(\mathcal{A})$ диаграмме

$$\begin{array}{ccc} K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet & \text{построить диаграмму} & K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} (f)^\bullet \xrightarrow{h} K[1]^\bullet \\ \downarrow u & & \downarrow u & \downarrow v & \downarrow w & \downarrow u[1] \\ K'^\bullet \xrightarrow{f'} L'^\bullet & & K'^\bullet \xrightarrow{f'} L'^\bullet \xrightarrow{g'} C(f')^\bullet \xrightarrow{h'} K[1]^\bullet \end{array}$$

Это легко сделать: пусть $vf = f'u + dh + hd$. Положим $w(k, l) = (u(k), v(l) + h(k))$. Проверка показывает, что w – морфизм комплексов и два правые квадрата коммутируют.

Проверим аксиому TR4. По паре морфизмов f и g строится диаграмма



Определим морфизмы $u: C(f) \rightarrow C(gf)$, $u(k, l) = (k, g(l))$ и $v: C(gf) \rightarrow C(g)$, $v(k, m) = (f(k), m)$. Легко видеть, что это действительно морфизмы комплексов и при этом два недостающие треугольника в диаграмме октаэдра оказываются коммутативными (в категории комплексов). Проверим, что треугольник

$$C(f) \xrightarrow{u} C(gf) \xrightarrow{v} C(g) \xrightarrow{w} C(f)[1],$$

– выделенный, где $w(l, m) = (0, l)$. А именно, он изоморфен стандартному треугольнику при помощи диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} C(f)^\bullet & \xrightarrow{u} & C(gf)^\bullet & \xrightarrow{v} & (g)^\bullet & \xrightarrow{w} & C(f)[1]^\bullet \\ \parallel & & \parallel & & \beta \uparrow \downarrow \alpha & & \parallel \\ C(f)^\bullet & \xrightarrow{u} & C(gf)^\bullet & \xrightarrow{v'} & C(u)^\bullet & \xrightarrow{w'} & C(f)[1]^\bullet \end{array}$$

По определению, $C(u)^i = C(f)^{i+1} \oplus C(gf)^i = K^{i+1} \oplus L^{i+1} \oplus K^{i+1} \oplus M^i$. Определим морфизмы $\alpha: C(g) \rightarrow C(u)$, $\alpha(l, m) = (0, l, 0, m)$, и $\beta: C(u) \rightarrow C(g)$, $\beta(k, l, k', m) = (l + f(k'), m)$. Проверки показывают, что α и β – действительно морфизмы комплексов, $\beta\alpha = 1_{C(g)}$, $v = \beta v'$, $w = w'\alpha$. Кроме того, $\alpha\beta$ гомотопно $1_{C(u)}$, гомотопия задаётся при помощи отображений $h(k, l, k', m) = (k', 0, 0, 0)$. Это и означает изоморфизм двух треугольников. Слушателю остаётся лишь проверить коммутативность диаграммы октаэдра. \square

Задача 3. Проверьте, что в диаграмме октаэдра, построенной в доказательстве предложения, два возможных морфизма из Y в Y' и из Y' в $Y[1]$ совпадают.

Задача 4. Приведите пример, показывающий, что в аксиоме TR3 морфизм w не единственен, даже если $u = 1_X, v = 1_{Y'}$.

Теперь введём триангулированную структуру на производной категории. Пусть $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ – одна из версий производной категории. В качестве функтора сдвига возьмём обычный сдвиг комплексов, выделенным треугольником назовём треугольник, изоморфный (в $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$) стандартному треугольнику $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \rightarrow C(f)^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet$.

Проверить, что эти данные удовлетворяют аксиомам триангулированной категории, удобно в общем контексте локализации триангулированных категорий.

Пусть \mathcal{T} – триангулированная категория, S – класс морфизмов в \mathcal{T} , удовлетворяющий (правым) условиям Ore. Предположим, что S также удовлетворяет условиям

1. $S[1] = S$,

2. если в TR3 морфизмы u и v лежат в S , то w можно выбрать также лежащим в S .

Введём сдвиг на локализованной категории $\mathcal{T}[S^{-1}]$: такой же, как и в \mathcal{T} на объектах, $(fs^{-1})[1] = f[1](s[1])^{-1}$ на морфизмах. Определим выделенные треугольники в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ как треугольники, изоморфные треугольнику вида $Q(X) \rightarrow Q(Y) \rightarrow Q(Z) \rightarrow Q(X[1])$, где $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ – выделенный треугольник в \mathcal{T} .

Предложение 7. Категория $\mathcal{T}[S^{-1}]$ с введёнными выше функтором сдвига и выделенными треугольниками триангулирована.

Доказательство. Проверять нужно три аксиомы: TR1c, TR3 и TR4.

Проверим TR1c. Пусть морфизм $X \rightarrow Y$ задан домиком $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y$. Дополним f до выделенного треугольника $X' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X'$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X'[1] \\ \downarrow s & & \parallel & & \parallel & & \downarrow s[1] \\ X & \xrightarrow{fs^{-1}} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{s[1]h} & X[1] \end{array}$$

показывает, что треугольник $X \xrightarrow{fs^{-1}} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{sh} X$ также выделен.

Проверим TR3. Можно считать, что выделенные треугольники, фигурирующие в формулировке – стандартные, а морфизмы $X \rightarrow X'$ и $Y \rightarrow Y'$ заданы домиками $X \xleftarrow{s} X'' \xrightarrow{u} X'$ и $Y \xleftarrow{t} Y'' \xrightarrow{v} Y'$. Далее, заменяя домик $X \xleftarrow{s} X'' \xrightarrow{u} X'$ на эквивалентный, можно считать, что существует морфизм $f'': X'' \rightarrow Y''$ такой, что $vf'' = f'u$ и $tf'' = fs$. Дополним f'' до выделенного треугольника $X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z'' \xrightarrow{h''} X''[1]$. По аксиоме TR3 существуют

морфизмы выделенных треугольников, замыкающие диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\
 \uparrow s & & \uparrow t & & \uparrow r & & \uparrow s[1] \\
 X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' & \xrightarrow{g''} & Z'' & \xrightarrow{h''} & X''[1] \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow u[1] \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & X'[1].
 \end{array}$$

Причём r можно выбрать лежащим в S по условию 2. Отсюда видно, что морфизм $wr^{-1}: Z \rightarrow Z'$ будет искомым.

Проверим TR4. Пусть дана пара морфизмов $fs^{-1}: X \rightarrow Y$ и $gt^{-1}: Y \rightarrow Z$. Построим изоморфную ей пару морфизмов f' и g , пришедших из \mathcal{T} : рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 X'' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g} & Z \\
 \downarrow t' & & \downarrow t & & \parallel \\
 X' & \xrightarrow{f} & Y & & \\
 \downarrow s & & \parallel & & \parallel \\
 X & \xrightarrow{fs^{-1}} & Y & \xrightarrow{gt^{-1}} & Z
 \end{array}$$

Для пары f' и g требуемая диаграмма октаэдра существует по аксиоме TR4 для \mathcal{T} . Заменяя в ней X'' на X при помощи st' и Y' на Y при помощи t , получаем требуемую диаграмму для исходной пары. \square

Триангулированность производных категорий теперь следует из того, что класс квазиизоморфизмов в гомотопической категории удовлетворяет условиям 1 и 2. Для условия 1 это очевидно, условие 2 проверяется с помощью длинной точной последовательности в когомологиях (предложение 3) и 5-леммы.

Наконец, объясним, что выделенные треугольники действительно заменяют точные тройки. А именно, покажем, что любую точную тройку комплексов $0 \rightarrow K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \rightarrow 0$ можно дополнить до выделенного треугольника $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \rightarrow K[1]^\bullet$ в производной категории. Для этого покажем, что диаграмма $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet$ изоморфна в производной категории диаграмме $K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{u} C(f)^\bullet$ (которая дополняется до стандартного выделенного треугольника). Зададим морфизм комплексов $t: C(f)^\bullet \rightarrow M^\bullet$ равенством $t(k, l) = g(l)$. Несложно видеть, что t – морфизм комплексов и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 K^\bullet & \xrightarrow{f} & L^\bullet & \xrightarrow{g} & M^\bullet \\
 \parallel & & \parallel & & \uparrow t \\
 K^\bullet & \xrightarrow{f} & L^\bullet & \xrightarrow{u} & C(f)^\bullet
 \end{array}$$

Задача 5. Проверьте, что t – квазиизоморфизм.

Следствие 8. Пусть $0 \rightarrow K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \rightarrow 0$ – точная тройка комплексов. Тогда для любого когомологического функтора F на производной категории имеется длинная точная последовательность

$$\dots \rightarrow F(M[-1]) \rightarrow F(K) \rightarrow F(L) \rightarrow F(M) \rightarrow F(K[1]) \rightarrow \dots$$

В частности, для любого комплекса U имеется длинная точная последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(U, M[-1]) \rightarrow \\ \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(U, K) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(U, L) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(U, M) \rightarrow \\ \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(U, K[1]) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

и аналогичная последовательность для $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(-, U)$.