24.03.2016
Лекция 7

Размерность

Насколько длинной может быть проективная резольвента модуля? Как много ненулевых групп Tor может быть между двумя модулями? Насколько сложно устроены модули над заданным кольцом? Ответить на эти вопросы помогает понятие размерности.

Проективной и инъективной размерностями модуля M над кольцом A называются числа

$$\mathrm{pd}(M) = \max\{i \mid \exists N \ \mathrm{Ext}^i(M, N) \neq 0\} \quad \text{и} \quad \mathrm{id}(M) = \max\{i \mid \exists N \ \mathrm{Ext}^i(N, M) \neq 0\}$$

(или бесконечность, если эти числа не существуют).

Примеры:

1. $\mathrm{pd}(M) = 0$ тогда и только тогда, когда M проективен,
2. $\mathrm{pd}(M) \leqslant 1$ для конечно порождённой абелевой группы M,
3. $\mathrm{pd}(\mathsf{k}) = \infty$, где k – тривиальный модуль над кольцом $\mathsf{k}[x]/(x^2)$,
4. $\mathrm{pd}(\mathsf{k}) = n$, где k – тривиальный модуль над кольцом $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ (это не очевидно, но мы скоро это объясним).

Задача 1. Пусть в точной тройке $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ известны $\mathrm{pd}(M')$ и $\mathrm{pd}(M'')$. Что можно сказать о $\mathrm{pd}(M)$?

Оказывается, размерностью модуля ограничиваются длины его резольвент. Длиной комплекса $K_n \to \ldots \to K_0$ мы будем считать n.

Лемма 1. *У модуля M есть проективная резольвента длины $n \Leftrightarrow \mathrm{pd}(M) \leqslant n$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно, докажем $\Leftarrow$ по индукции. Случай $n = 0$ очевиден, пусть $\mathrm{pd}(M) > 0$. Переход индукции: пусть $0 \to K \to F \to M \to 0$ – накрытие модуля M свободным модулем F. Из длинной точной последовательности $\mathrm{Ext}^i(-, N)$ для произвольного N получаем: $\mathrm{pd}(K) = \mathrm{pd}(M) - 1$. Значит, у K есть резольвента длины $n - 1$. Приписывая её к F, получим резольвенту M длины n. $\square$

Тем самым, проективная размерность модуля – это длина его минимальной проективной резольвенты. Заметим, что мы на самом деле доказали несколько больше: а именно, что если строить проективную резольвенту для модуля с $\mathrm{pd}(M) = n$ как угодно, то на n-м шаге она сама собой построится.

Глобальной размерностью $\mathrm{gldim}(A)$ кольца A называется максимум таких $i \in \mathbb{Z}$, что для некоторых модулей M, N над A верно $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) \neq 0$. Как нетрудно видеть, он совпадает с максимумом проективных размерностей всех A-модулей и с максимумом инъективных размерностей всех A-модулей. В частности, все модули над A проективны $\Leftrightarrow$ все модули над A инъективны.

Примеры: глобальная размерность поля равна 0, глобальная размерность кольца $\mathbb{Z}$ равна 1. Последнее утверждение вытекает из любой из двух следующих задач.

Задача 2. Пусть A – целостное кольцо главных идеалов. Покажите, что любой подмодуль свободного A-модуля свободен.

Задача 3. Покажите, что глобальная размерность кольца A равна максимуму проективных размерностей всех конечно порождённых A-модулей. *Указание: предполагая, что* $\mathrm{Ext}^n(M', N) = 0$ *для всех конечно порождённых* M'*, покажите, что* $\mathrm{Ext}^n(M, N) = 0$ *для* *любого M. Для этого возьмите инъективную резольвенту $I^\bullet$ модуля N и покажите, что последовательность $\mathrm{Hom}(M, I^{n-1}) \to \mathrm{Hom}(M, I^n) \to \mathrm{Hom}(M, I^{n+1})$ точна. Для данного $f\colon M \to Z^n(I^\bullet)$ рассмотрите максимальный подмодуль M_0 в M, для которого f поднимается до $M_0 \to I^{n-1}$, и продолжите f на немного больший подмодуль.*

Вычислим глобальную размерность кольца многочленов. Основной инструмент здесь – следующая

Лемма 2. *Пусть A – кольцо, M – модуль над кольцом $A[x]$. Тогда*

$$\mathrm{pd}_A(M) \leqslant \mathrm{pd}_{A[x]}(M) \leqslant \mathrm{pd}_A(M) + 1.$$

При этом если $xM = 0$, то достигается равенство справа, а если M индуцирован с A-модуля (т.е. M имеет вид $A[x] \otimes_A F$ для некоторого $F \in A{-}\mathrm{Mod}$), то слева.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $A[x]$-модулей

$$0 \to A[x] \otimes_A M \xrightarrow{1\otimes x - x\otimes 1} A[x] \otimes_A M \to M \to 0. \tag{1}$$

Она точна: действительно, элементы двух левых модулей – это многочлены с коэффициентами в M, и точность можно проверить вручную. По задаче 1, $\mathrm{pd}_{A[x]}(M) \leqslant \mathrm{pd}_{A[x]}(A[x] \otimes_A M) + 1$. С другой стороны, если $P_\bullet$ – проективная резольвента для M над A, то $A[x] \otimes_A P_\bullet$ – проективная резольвента для $A[x] \otimes_A M$ над $A[x]$. Поэтому $\mathrm{pd}_{A[x]}(A[x] \otimes_A M) \leqslant \mathrm{pd}_A(M)$, это доказывает правое неравенство леммы. Левое почти очевидно: если у M есть проективная резольвента над $A[x]$ длины n, то она же будет проективной резольвентой M и над A той же длины.

Пусть $xM = 0, \mathrm{pd}_A M = n$, а N – такой A-модуль, что $\mathrm{Ext}^n(M, N) \neq 0$. Тогда последовательность (1) примет вид

$$0 \to A[x] \otimes_A M \xrightarrow{x} A[x] \otimes_A M \to M \to 0.$$

В длинной точной последовательности функторов $\mathrm{Ext}^i_{A[x]}(-, N)$ будет фрагмент

$$\mathrm{Ext}^n_{A[x]}(A[x] \otimes_A M, N) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^n_{A[x]}(A[x] \otimes_A M, N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{n+1}_{A[x]}(M, N) \to 0. \tag{2}$$

Покажем, что $\mathrm{Ext}^n_{A[x]}(A[x] \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$. Действительно, пусть $P_\bullet$ — проективная резольвента M как A-модуля, тогда $A[x] \otimes_A P_\bullet$ — проективная резольвента $A[x] \otimes_A M$ как $A[x]$-модуля. Имеем по сопряжённости

$$\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = H^n(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)) = H^n(\mathrm{Hom}_{A[x]}(A[x] \otimes_A P_\bullet, N)) = \mathrm{Ext}^n_{A[x]}(A[x] \otimes_A M, N).$$

Таким образом, в (2) левая стрелка изоморфна

$$\mathrm{Ext}^n_A(M, N) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^n_A(M, N).$$

Здесь умножение на x – нулевое, т.к. умножение на x аннулирует второй аргумент N. Значит, $\mathrm{pd}_{A[x]}(M) = \mathrm{pd}_A(M) + 1$. □

Задача 4. Проверьте оставшееся утверждение леммы: если модуль M индуцирован с некоторого A-модуля, то в неравенстве достигается равенство слева.

Следствие 3. *Глобальная размерность кольца $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, где k – поле, равна n.*

Следствие 4. *Проективная размерность модуля* k *над кольцом* $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, *где* k *– поле, равна* n.

Иными словами, любой $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$-модуль имеет проективную резольвенту длины n. В классической терминологии это – решение проблемы Гильберта о сизигиях.

Изучим кольца малых глобальных размерностей. Самый простой случай – размерность 0. Такие кольца вообще можно явно описать.

Напомним, модуль называется *неприводимым* или *простым*, если у него нет нетривиальных подмодулей. Модуль называется *полупростым*, если он есть прямая сумма простых. Кольцо A мы будем называть *полупростым*, если любой A-модуль полупрост.

Примеры: поле – полупростое кольцо. Тело – полупростое кольцо. Алгебра матриц над полем полупроста. Групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$ конечной группы полупроста.

Задача 5. a) Докажите, что подмодуль и фактормодуль полупростого модуля полупросты. b) Докажите, что кольцо A полупросто $\Leftrightarrow$ A полупросто как модуль над собой. c) Докажите, что множество классов изоморфизма простых модулей над полупростым кольцом конечно. Верно ли это без предположения о полупростоте?

Предложение 5. *Следующие условия эквивалентны:*

- *A имеет глобальную размерность 0;*
- *A полупросто;*
- *A изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над телами.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Несложно видеть, что любой подмодуль выделяется прямым слагаемым. Действительно, любая точная тройка расщепима, т.к. $\mathrm{Ext}^1(M, N) = 0$. Покажем, что A полупросто как A-модуль. Действительно, начнём раскладывать A в прямые суммы подмодулей. Если за конечное число шагов не получится прямой суммы простых, то получится разложение в счётную прямую сумму $A = \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i$. Пусть при этом $1 \in \oplus_{i=1}^n M_i$, тогда $A = A \cdot 1 \subset A \oplus_{i=1}^n M_i = \oplus_{i=1}^n M_i$ – противоречие.

$2 \Rightarrow 3$. Разложим A в прямую сумму простых модулей (она будет конечной), сгруппируем изоморфные: $A \cong \oplus S_i^{\oplus n_i}$. Посчитаем кольцо эндоморфизмов A как левого модуля над собой. Получится $\mathrm{End}_A(A) = \prod \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathrm{End}_A(S_i))$. При этом $T_i = \mathrm{End}_A(S_i)$ – тело, так как по лемме Шура ненулевые эндоморфизмы простого модуля обратимы. С другой стороны, $\mathrm{End}_A(A) = A^{op}$. Получаем $A \cong (\prod \mathrm{Mat}_{n_i}(T_i))^{op} \cong \prod \mathrm{Mat}_{n_i}(T_i^{op})$.

$3 \Rightarrow 2$. Достаточно показать, что одно кольцо $\mathrm{Mat}_n(T)$ матриц над телом полупросто. Действительно, как левый модуль $\mathrm{Mat}_n(T) \cong V^{\oplus n}$, где $V = T^n$ – стандартный простой модуль.

$2 \Rightarrow 1$. Любой простой A-модуль проективен как прямое слагаемое A. А значит, все A-модули проективны как прямая сумма простых. $\square$

Задача 6. Сколько неизоморфных простых модулей существует над кольцом $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{H} \times \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$?

Теперь перейдём к кольцам глобальной размерности 1. Кольца глобальной размерности 0 или 1 называются *наследственными*.

Лемма 6. *Кольцо A наследственно $\Leftrightarrow$ любой подмодуль проективного проективен $\Leftrightarrow$ любой фактормодуль инъективного инъективен.*

На первой лекции мы выяснили, что любой комплекс над полупростым кольцом квазиизоморфен прямой сумме своих когомологий. На самом деле, это верно для комплексов модулей над любым наследственным кольцом.

Предложение 7. *Пусть $K^\bullet$ – комплекс над кольцом глобальной размерности $\leqslant 1$. Тогда $K^\bullet$ квазиизоморфен комплексу с нулевыми дифференциалами.*

Вначале докажем лемму.

Лемма 8. *Любой комплекс проективных модулей $P^\bullet$ над наследственным кольцом изоморфен прямой сумме комплексов вида*

$$\ldots 0 \to K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \to 0 \ldots, \tag{3}$$

где d^i инъективен.

Доказательство. Для любого n заметим, что образ B^{n+1} отображения $d^n \colon P^n \to P^{n+1}$ – проективный модуль как подмодуль проективного. Значит, по свойству проективных модулей, d^n расщепим: существует подмодуль $B'^{n+1} \subset P^n$, такой что $P^n = Z^n \oplus B'^{n+1}$ и $d^n|_{B'^{n+1}}$ – изоморфизм. Очевидно, B'^{n+1}, Z^n проективны и $P^\bullet$ изоморфен прямой сумме комплексов $B'^{n+1} \to Z^{n+1}$. □

Доказательство предложения 7. Оно следует из того, что комплекс вида (3) квазиизоморфен своим когомологиям и того, что любой комплекс $K_\bullet$ квазиизоморфен комплексу с проективными членами. Для доказательства последнего нужно построить согласованные проективные резольвенты каждого K_i. А именно, построить бикомплекс $P_{\bullet\bullet}$, у которого i-й столбец – резольвента K_i. Затем нужно взять свёртку этого бикомплекса. Если $K_\bullet$ ограничен справа, то свёртка бикомплекса будет квазиизоморфна $K_\bullet$, это мы доказывали в лекции про Tor-ы. То же самое верно и если A имеет конечную глобальную размерность, т.к. тогда бикомплекс будет ограничен сверху и снизу. Доказательства того, что любой комплекс квазиизоморфен комплексу с проективными членами, в общем случае мы сейчас не приводим. □

Задача 7. Постройте квазиизоморфизм из комплекса с проективными членами в комплекс $\ldots \mathsf{k}[x]/(x^3) \xrightarrow{x^2} \mathsf{k}[x]/(x^3) \xrightarrow{x^2} \mathsf{k}[x]/(x^3) \xrightarrow{x^2} \ldots$ над кольцом $\mathsf{k}[x]$.
Задача 8 (формулы универсальных коэффициентов). Пусть $K_\bullet$ – комплекс проективных модулей над наследственным кольцом, L – ещё один модуль. a) Тогда

$$H^n(\mathrm{Hom}(K_\bullet, L)) = \mathrm{Hom}(H_n(K_\bullet), L) \oplus \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(K_\bullet), L).$$

b) Получите аналогичную формулу для $L \otimes K_\bullet$.
c) Как вычислить гомологии и когомологии многообразия X с коэффициентами в абелевой группе M, если известны $H_i(X, \mathbb{Z})$?

Есть и другие, негомологические способы определять размерность кольца. В дальнейшем, будем считать, что кольцо коммутативно и нётерово.

Например у Атьи-Макдональда доказывается эквивалентность следующих определений размерности коммутативного нётерова локального кольца A с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$:

1. $\dim A$ – максимальная длина n цепочки $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ различных простых идеалов в A (это называется *размерностью Крулля* $\mathrm{Krdim}\, A$ и имеет смысл не только для локальных колец).

2. $\dim A$ – степень многочлена $P(t) = \dim_{A/\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^t/\mathfrak{p}^{t+1})$ плюс 1.

3. $\dim A$ – минимальное число образующих какого-либо $\mathfrak{p}$-примарного идеала.

Для определения размерности кольца, которое не обязательно локально, естественно взять максимум размерностей его локальных колец. Легко видеть, что определение размерности по Круллю при этом оказывается корректным. Верно это и для глобальной размерности:
Задача 9. Пусть A – нётерово коммутативное кольцо. Тогда $\mathrm{gldim}(A) = \max_{\mathfrak{p}}\ \mathrm{gldim}(A_{\mathfrak{p}})$, где максимум берётся по простым идеалам $\mathfrak{p} \subset A$.

Связь между глобальной размерностью кольца и размерностью Крулля описывается замечательной теоремой Серра:

Теорема 9. *Пусть A – локальное нётерово коммутативное кольцо. Тогда:*

1. *если A регулярно, то* $\mathrm{gldim}\, A = \mathrm{Krdim}\ A < \infty$*,*

2. *если A не регулярно, то* $\mathrm{gldim}\, A = \infty$*.*

Геометрический смысл этой теоремы такой: гладкость точки на алгебраическом многообразии соответствует конечности глобальной размерности локального кольца в этой точке.

Следствие 10. *Пусть $A = \mathsf{k}[X]$ – кольцо регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии X над полем k. Если X неособо, то* $\mathrm{gldim}\, A = \dim A = \dim X$*. Если X особо, то* $\mathrm{gldim}\, A = \infty$*.*