10.03.2016
Лекция 5

Функторы Tor и плоские модули.

Сегодня мы рассмотрим ещё один пример производных функторов – функторы Tor.

Функтор Tor – это производный от функтора тензорного умножения. Тензорное умножение над кольцом A – это ковариантный по двум аргументам функтор $(\mathrm{mod}{-}A) \times (A{-}\mathrm{mod}) \to \mathcal{A}b$, точный справа по каждому из аргументов. Можно определить производный функтор по первому или по второму аргументу. Чуть позже мы проверим, что получатся изоморфные бифункторы. Они обозначаются $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$. Если кольцо A коммутативно, то тензорное произведение коммутативно, а значит, и $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = \mathrm{Tor}_i^A(N, M)$ (изоморфизм бифункторов).

Пример. Посчитаем $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, N)$. Умножим резольвенту $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$ модуля $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на N, получим $N \xrightarrow{n} N$. Вычисляя когомологии, получаем: $\mathrm{Tor}_0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, N) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes N = N/nN$, $\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, N) = \{x \mid nx = 0\} \subset N$.

Название Tor означает torsion – кручение. Действительно, Tor позволяет описывать кручение в модулях. Пусть A – коммутативное целостное кольцо, M – A-модуль, $a \in A$ – элемент. *a-кручением в M* называется подмодуль $\mathrm{Tors}_a(M) = \{m \mid \exists n \in \mathbb{N}\ a^n m = 0\} \subset M$. *Кручением M* называется объединение $\mathrm{Tors}(M) = \cup_{a \neq 0} \mathrm{Tors}_a(M)$ (проверьте, что это подмодуль). Рассмотрим локализацию $A[a^{-1}]$ и точную последовательность

$$0 \to A \to A[a^{-1}] \to A[a^{-1}]/A \to 0.$$

Умножая её тензорно на произвольный модуль M, получим длинную точную последовательность Tor'ов:

$$\ldots \mathrm{Tor}_1(A[a^{-1}], M) \to \mathrm{Tor}_1(A[a^{-1}]/A, M) \to A \otimes_A M \to A[a^{-1}] \otimes_A M \ldots$$

В ней $\mathrm{Tor}_1(A[a^{-1}], M) = 0$ т.к. тензорное умножение на $A[a^{-1}]$ есть локализация по a и потому – точный функтор. Поэтому имеем

$$\mathrm{Tor}_1(A[a^{-1}]/A, M) = \ker(M \to M[a^{-1}]) = \mathrm{Tors}_a(M).$$

Задача 1. Получите аналогичное выражение для $\mathrm{Tors}(M)$.
Задача 2. Посчитайте $\mathrm{Tor}_i^A(\mathsf{k}, \mathsf{k})$, где $A = \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] = \mathsf{k}[V]$, а k – тривиальный модуль.
Задача 3. a) Проверьте, что Tor_i коммутируют с прямыми суммами.
b) Верно ли это для прямых произведений?

Правый модуль M над A называется *плоским*, если функтор $M \otimes_A -$ точен, аналогично для левого модуля (в случае коммутативного кольца, естественно, разницы нет).

Примеры:

- Любой свободный модуль плоский.
- Плоскость прямой суммы $\oplus_\alpha P_\alpha$ равносильна плоскости каждого P_α.
- Любой проективный модуль плоский (как прямое слагаемое свободного).
- Поле частных коммутативного целостного кольца A – плоский A-модуль.
- Вообще, локализация A_S кольца A по мультипликативной системе S – плоский A-модуль (т.к. функтор локализации точен).

Задача 4. Проверьте эквивалентность следующих условий на модуль M над A:

1. M плоский;
2. $\mathrm{Tor}_1(N, M) = 0$ при всех $i > 0$ и N;
3. $\mathrm{Tor}_1(A/I, M) = 0$ для любого правого идеала $I \subset A$;
4. если $0 \to N' \to N$ – вложение, то $0 \to N' \otimes M \to N \otimes M$ – вложение;
5. для любого правого идеала $I \subset A$ гомоморфизм $I \otimes M \to M$ инъективен.

Заметим, что $\mathbb{Q}$ – пример плоского не проективного $\mathbb{Z}$-модуля. Если же говорить о конечно порождённых модулях над коммутативным кольцом, то плоские модули весьма близки к проективным. И те, и другие хорошо описываются в локальных терминах.

Действительно, плоскость – это локальное свойство.

Лемма 1. *Модуль M над коммутативным кольцом A плоский $\Leftrightarrow$ для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ модуль $M_{\mathfrak{p}}$ – плоский над $A_{\mathfrak{p}}$.*

Доказательство. Докажем $\Rightarrow$. Функтор $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} -$ на категории $A_{\mathfrak{p}}$-модулей изоморфен $(M \otimes_A -)_{\mathfrak{p}}$, следовательно точен как композиция точных функторов $M \otimes_A -$ и локализации. Докажем $\Leftarrow$. Пусть $0 \to K \to L$ – вложение, $Z = \ker(M \otimes K \to M \otimes L)$. Тогда $Z_{\mathfrak{p}} = \ker(M_{\mathfrak{p}} \otimes K_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \otimes L_{\mathfrak{p}}) = 0$ для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$. Но если $Z \neq 0$, то для $z \neq 0$ существует $\mathfrak{p}$ такой, что $Ann(z) \subset \mathfrak{p}$. Значит, $Z_{\mathfrak{p}} \neq 0$, противоречие. □

Проективность модуля над кольцом тоже можно проверять локально.

Лемма 2. *Конечно представимый модуль P над коммутативным кольцом A проективен $\Leftrightarrow$ модуль $P_{\mathfrak{p}}$ проективен над $A_{\mathfrak{p}}$ для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$.*

Доказательство. Если A коммутативно, то функтор $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ принимает значения в категории A-модулей, а не просто абелевых групп, этим мы и воспользуемся.

Следствие $\Rightarrow$ очевидно, докажем $\Leftarrow$. Как мы видели выше, точность последовательности $0 \to \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, L) \to \mathrm{Hom}(P, K) \to 0$ следует из точности её локализации $0 \to \mathrm{Hom}(P, M)_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{Hom}(P, L)_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{Hom}(P, K)_{\mathfrak{p}} \to 0$ по любому простому идеалу $\mathfrak{p}$. Заменяя $\mathrm{Hom}_A(P, -)_{\mathfrak{p}}$ на $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, -_{\mathfrak{p}})$ при помощи следующей задачи, получаем последовательность $0 \to \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}) \to 0$, точную в силу проективности всех $P_{\mathfrak{p}}$. □

Задача 5. Пусть A и B – коммутативные кольца, B плоско над A, M – конечно представимый A-модуль, N – ещё один A-модуль. Тогда естественное отображение

$$B \otimes \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

– изоморфизм.

А для локальных колец вообще всё устроено просто.

Лемма 3. *Пусть A – нётерово локальное кольцо, k – его поле вычетов. Тогда следующие условия на конечно порождённый модуль M эквивалентны:*

1. *M свободный;*
2. *M проективный;*
3. *M плоский;*
4. *$\mathrm{Tor}_1(M, \mathsf{k}) = 0$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ очевидно. Докажем $4 \Rightarrow 1$. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ – максимальный идеал. Выберем $\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n$ – базис k-векторного пространства $M/\mathfrak{p}M = M \otimes \mathsf{k}$. Покажем, что гомоморфизм $f\colon A^{\oplus n} \to M$, переводящий e_i в m_i, – изоморфизм. Во-первых, функтор $- \otimes \mathsf{k}$ точен справа, поэтому $(\operatorname{coker} f) \otimes \mathsf{k} = \operatorname{coker}(\mathsf{k}^{\oplus n} \to M/\mathfrak{p}M) = 0$. Значит, по лемме Накаямы $\operatorname{coker} f = 0$. Теперь напишем длинную точную последовательность производных функторов

$$0 = \mathrm{Tor}_1(M, \mathsf{k}) \to (\ker f) \otimes \mathsf{k} \to \mathsf{k}^{\oplus n} \to M/\mathfrak{p}M,$$

из которой видим, что $(\ker f) \otimes \mathsf{k} = 0$ и снова по лемме Накаямы $\ker f = 0$. Отметим, что $\ker f$ конечно порождён из-за нётеровости кольца A. □

Итак, мы доказали

Предложение 4. *Конечно порождённый модуль над коммутативным нётеровым кольцом плоский $\Leftrightarrow$ проективный.*

Геометрически плоскость означает локальную тривиальность. Т.е. конечно порождённый плоский пучок на многообразии – это векторное расслоение. Это верно в том числе и для не аффинных многообразий. А вот проективность при работе с не обязательно аффинными многообразиями перестаёт быть локальным свойством и вообще не очень осмысленна – так, на проективных многообразиях вообще не бывает нетривиальных проективных объектов в категории пучков.

Связь между локальной и глобальной тривиальностью модуля очень непроста. Пример – следующая

Теорема 5 (Суслин, Квиллен, 1976)**.** *Всякий конечно порождённый проективный модуль над кольцом $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, где k – поле, свободен.*

Теперь докажем, что определения групп Ext как производных функторов по первому и по второму аргументу эквивалентны. Для этого определим Ext как производный функтор по двум аргументам сразу. Сперва введём бикомплексы и свёртки.

Бикомплексом называется набор модулей $K^{ij}, i, j \in \mathbb{Z}$ и гомоморфизмов $d_I^{ij}\colon K^{ij} \to K^{i+1,j}$ и $d_{II}^{ij}\colon K^{ij} \to K^{i,j+1}$ таких, что $(d_I)^2 = 0$, $(d_{II})^2 = 0$ и $d_I d_{II} = d_{II} d_I$. Иначе говоря, бикомплекс – это комплекс комплексов.

Свёртка бикомплекса – это комплекс $Tot^\bullet(K^{\bullet\bullet})$, у которого $Tot^n = \oplus_{i+j=n} K^{ij}$, $d^n(x) = d_I^{ij}(x) + (-1)^i d_{II}^{ij}(x)$ при $x \in K^{ij}$.

Пример. Рассмотрим морфизм комплексов как бикомплекс с -1-м и 0-м столбцами. Тогда его свёртка – в точности конус морфизма.

Пусть $P_\bullet$ – проективная резольвента модуля M, а $I^\bullet$ – инъективная резольвента для N. Определим $\mathrm{Ext}^i_{I,II}(M, N)$ как когомологии свёртки $Tot^\bullet(\mathrm{Hom}(P_\bullet, I^\bullet))$. Обычным образом устанавливается функториальность по обоим аргументам.

Теперь покажем, что $\mathrm{Ext}_{I,II} \cong \mathrm{Ext}_{II}$. Пусть $\widetilde{P}_\bullet$ – аугментированная резольвента (с (-1)-м членом M). Тогда в бикомплексе $\mathrm{Hom}(\widetilde{P}_\bullet, I^\bullet)$ строки точны (т.к. $\mathrm{Hom}(-, I^j)$ точен), а значит по следующей лемме и его свёртка точна. Но у бикомплекса $\mathrm{Hom}(\widetilde{P}_\bullet, I^\bullet)$ есть подбикомплекс $\mathrm{Hom}(P_\bullet, I^\bullet)$, фактор по которому изоморфен $\mathrm{Hom}(M, I^\bullet)$ (сдвинутому). Переходя к свёрткам, получаем точную тройку комплексов $0 \to Tot(\mathrm{Hom}(P_\bullet, I^\bullet)) \to Tot(\mathrm{Hom}(\widetilde{P}_\bullet, I^\bullet)) \to \mathrm{Hom}(M, I^\bullet[1]) \to 0$. Длинная точная последовательность когомологий устанавливает нужные изоморфизмы.

Лемма 6. *Пусть у бикомплекса, лежащего в 1-й четверти, все строки (или столбцы) точны. Тогда свёртка этого бикомплекса точна.*

Доказательство. Пусть все строки точны. Так же, как в рассуждениях выше, рассмотрим подбикомплекс, полученный отбрасыванием первой строки, и факторбикомплекс, образованный первой строкой. Свёртка факторбикомплекса точна, следовательно, свёртка исходного бикомплекса квазиизоморфна свёртке бикомплекса, полученного отбрасыванием первой строки. Продолжая, можно так отбросить любое конечное число первых строк. Тем самым, для любой когомологии наступит момент, когда станет ясно, что она нулевая. □

Внимательный слушатель, конечно, заметил, что приведённое рассуждение, по сути, может быть выражено одной строчкой:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i_I(M,N) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(A)}(P_\bullet(M), N[i]) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(A)}(P_\bullet(M), I^\bullet(N)[i]) = \\ = \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(A)}(M, I^\bullet(N)[i]) = \mathrm{Ext}^i_{II}(M,N).\end{aligned}$$

Сделаем ещё одно замечание. Для комплексов $K_\bullet$, ограниченного справа, и $L^\bullet$, ограниченного слева, можно рассмотреть бикомплекс $\mathrm{Hom}(K_\bullet, L^\bullet)$. Его свёртка будет с точностью до некоторых знаков совпадать с комплексом морфизмов $\underline{\mathrm{Hom}}(K_\bullet, L^\bullet)$. Так что когомологии этой свёртки – морфизмы между $K_\bullet$ и сдвигами $L^\bullet$ в гомотопической категории.

Две лекции назад мы определили инъективные модули над кольцом. Сейчас мы докажем, что инъективных модулей достаточно много. Доказательство на самом деле будет аналогично доказательству того, что проективных модулей достаточно много, если это последнее доказательство правильно осмыслить.

А именно, заметим, что стандартная проективная накрывающая заданного A-модуля M есть

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M)} \mathbb{Z} \right) \to M.$$

Это отображение есть композиция двух отображений:

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M)} \mathbb{Z} \right) \to A \otimes_{\mathbb{Z}} M \to M. \tag{1}$$

Здесь первое отображение – стандартная проективная накрывающая M как абелевой группы, тензорно умноженная на A. Поэтому полезно посмотреть на расширение колец $\mathbb{Z} \to A$ и связанные с ним функторы ограничения и расширения скаляров.

Пусть дан гомоморфизм колец $B \to A$. Напомним, что у функтора забывания F из A-модулей в B-модули есть сопряженный слева функтор $L = A \otimes_B -$ и сопряжённый справа функтор $R = \mathrm{Hom}_B(A, -)$. A-модули вида $A \otimes_B N$, где N – B-модуль, называются *индуцированными*, а модули вида $\mathrm{Hom}_B(A, N)$ – *коиндуцированными.*

Задача 6. Проверьте, что модули, индуцированные с проективных, проективны, а коиндуцированные с инъективных – инъективны.

Пользуясь введёнными обозначениями, можно сказать, что первое отображение в (1) есть L, применённый к свободной накрывающей абелевой группы $F(M)$, а второе – коединица сопряжения. В таком виде (1) переписывается для двойственного случая инъективных модулей. Ясно при этом, что сначала нужно рассмотреть случай кольца целых чисел.

Лемма 7. *В категории $\mathbb{Z}$-модулей достаточно много инъективных.*

Доказательство. Вложим заданный модуль M в инъективный. Конструкция в точности двойственная той, что применялась для накрытия произвольного модуля свободным. Рассмотрим естественное отображение

$$M \to \prod_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \colon m \mapsto (f(m))_f.$$

То, что $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – инъективный модуль, мы проверим чуть позднее. Модуль $\prod \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективен как прямое произведение инъективных модулей. Чтобы показать мономорфность отображения, проверим, что $\forall m \in M\ \exists f \in \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ такой, что $f(m) \neq 0$. Пусть циклическая подгруппа в M, порождённая m, состоит из n элементов. Тогда положим $f(m) = 1/n$ и продолжим как-нибудь f с $\langle m \rangle$ на весь M (продолжение существует по определению инъективности $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Если же подгруппа $\langle m \rangle$ свободна, то положим $f(m) = \frac{1}{2016}$ и тоже продолжим. $\square$

Докажем теперь

Предложение 8. *Любой A-модуль M вкладывается в инъективный.*

Доказательство. Вложим абелеву группу $F(M)$ в инъективный $\mathbb{Z}$-модуль. Например, как в доказанной выше лемме, в $I = \prod_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. По сопряжённости, вложению $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(M), I)$ отвечает гомоморфизм A-модулей $\bar{g} \in \mathrm{Hom}_A(M, R(I))$, который имеет вид композиции

$$M \to RF(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, F(M)) \xrightarrow{Rg} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I) = R(I).$$

Здесь первая стрелка – единица сопряжения (её инъективность проверяется непосредственно), а вторая – Rg (она инъективна, так как $\mathrm{Hom}(A, -)$ точен слева). Наконец, A-модуль $R(I)$ инъективен как коиндуцированный с инъективного. $\square$

Осталось понять, почему $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективен. Для этого понадобится

Предложение 9 (критерий инъективности Бэра)**.** *Модуль I над кольцом A инъективен $\Leftrightarrow$ для любого левого идеала $J \subset A$ любой гомоморфизм $f \colon J \to I$ продолжается на A.*

Доказательство. Нужно показать, что в любой диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[dl, dashed] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

существует пунктирная стрелка, замыкающая диаграмму. Идея проста: постепенно продолжать гомоморфизм в I на всё большие подмодули в N. Шаг индукции такой: нужно продолжить $f\colon N_0 \to I$ на подмодуль $N_1 = \langle N_0, n\rangle$, порождённый над N одним элементом. Для этого рассмотрим расслоенную (и одновременно корасслоенную) диаграмму

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "n"] \\ N_0 \arrow[r] & N_1, \end{tikzcd}$$

где $J = N_0 \times_{N_1} A$. Тогда ограничение $f\,|_J$ продолжается на A по условию, и склеивается с f до гомоморфизма, определённого на N_1. Чтобы аккуратно провести доказательство, надо воспользоваться трансфинитной индукцией или леммой Цорна: например, рассмотреть упорядоченное множество продолжений гомоморфизма f с N_0 на разные подмодули в N. $\square$

Следствие 10. *Пусть A – целостное кольцо главных левых идеалов. Тогда модуль I над A инъективен тогда и только тогда, когда он делим, т.е.*

$$\forall x \in I\ \forall a \neq 0 \in A\ \exists x \in I\ ay = x.$$

Следствие 11. *Таким образом, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – инъективные $\mathbb{Z}$-модули.*