25.02.2016
Лекция 3

Точные функторы и резольвенты

Разговор о категориях вообще мы закончим двумя важным понятиями: эквивалентности категорий и сопряжённого функтора.

Зная понятия композиции функторов и тождественного функтора, несложно дать определение взаимно обратных функторов и изоморфизма категорий. Однако такое определение оказывается мало полезным – в природе изоморфизмы категорий редки. Причина этого проста: естественные конструкции часто строят объект, изоморфный исходному, но это уже не сам исходный объект. Типичный пример – дважды двойственное векторное пространство. Правильное понятие такое:

Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если существуют функторы $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ такие, что $FG \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ и $GF \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Функторы F и G при этом называются *эквивалентностями* (а также *квазиобратными* друг другу).

Задача 1. a) Докажите что функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ – эквивалентность тогда и только тогда, когда
1) (F *строго полный*) отображение $\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F(X),F(Y))$ – биекция для всех $X,Y \in \mathcal{C}$ и
2) (F *существенно сюръективный*) любой объект в $\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $F(X)$.

b) Докажите, что категория конечномерных k-векторных пространств эквивалентна следующей: объекты – неотрицательные целые числа, морфизмы из n в m – матрицы размера $m \times n$ с элементами из k, композиция морфизмов – умножение матриц.

Пусть для пары функторов $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ имеется изоморфизм функторов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-,-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,R-).$$

В таком случае L называется *левым сопряжённым* функтором к R, а R – *правым сопряжённым* функтором к L.

Примеры:

1. левый сопряжённый к функтору забывания $\mathcal{T}op \to \mathcal{S}ets$ – взятие дискретной топологии, правый сопряжённый – взятие топологии слипшихся точек;
2. левый сопряжённый к забыванию из групп в множества – взятие свободной группы;
3. левый сопряжённый к забыванию из коммутативных k-алгебр в k-векторные пространства – взятие симметрической алгебры;
4. левый сопряжённый к ограничению представления группы G на подгруппу H – индуцирование.

Задача 2. Докажите, что сопряжённый функтор определён однозначно с точностью до изоморфизма.

Задача 3. Найдите сопряжённые функторы к естественному вложению категории A-модулей в категорию комплексов A-модулей.

Задача 4. a) Пусть $A \to B$ – гомоморфизм колец. Докажите, что левым сопряжённым к функтору забывания $B{-}\mathrm{Mod} \to A{-}\mathrm{Mod}$ будет функтор расширения скаляров $M \mapsto B \otimes_A M$, а правым сопряжённым – функтор $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(B,M)$.

b) Пусть A – кольцо, $S \subset A$ – центральная подалгебра, M – правый A-модуль. Проверьте, что правым сопряжённым к функтору $M \otimes_A -$ из A-модулей в S-модули будет функтор $\mathrm{Hom}_S(M, -)$.

При доказательстве сопряжённости функторов бывает полезным следующее утверждение.

Предложение 1. *Сопряжённость функторов $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ равносильна существованию морфизмов функторов $\varepsilon\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to RL$ (единица) и $\eta\colon LR \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (коединица) таких, что композиции*

$$L \to LRL \to L \quad \text{и} \quad R \to RLR \to R$$

тождественны.

Доказательство. Пусть имеется изоморфизм функторов

$$\phi_{-,-}\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, R-).$$

Построим единицу. Рассмотрим композицию морфизмов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-, L-) \xrightarrow{\phi_{-,L-}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, RL-).$$

По лемме Йонеды "по первому аргументу", получаем морфизм $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to RL$. Другими словами, для объекта $X \in \mathcal{C}$ морфизм единицы $e_X\colon X \to RLX$ соответствует 1_{LX} при изоморфизме $\phi_{X,LX}\colon\ \mathrm{Hom}(LX, LX) \to \mathrm{Hom}(X, RLX)$. Построим коединицу. Рассмотрим композицию морфизмов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-,-) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R-, R-) \xrightarrow{\phi^{-1}_{R-,-}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(LR-, -).$$

По лемме Йонеды "по второму аргументу", получаем морфизм $LR \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. Для $Y \in \mathcal{D}$ коединица $LRY \to Y$ отвечает 1_{RY} при изоморфизме $\phi_{RY,Y}\colon\ \mathrm{Hom}(LRY, Y) \to \mathrm{Hom}(RY, RY)$. Проверим, что композиция $L \to LRL \to L$ тождественна на объекте X. Морфизм $LRLX \to LX$ получается из 1_{RLX} при изоморфизме $\phi^{-1}_{RLX,LX}\colon\ \mathrm{Hom}(RLX, RLX) \to \mathrm{Hom}(LRLX, LX)$. Рассмотрим коммутативную (потому, что ϕ – морфизм функторов) диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(RLX, RLX) \arrow[r, "\phi^{-1}_{RLX,LX}"] \arrow[d, "{(e_X,1)}"] & \mathrm{Hom}(LRLX, LX) \arrow[d, "{(e_X,1)}"] \\
\mathrm{Hom}(X, RLX) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X,LX}"] & \mathrm{Hom}(LX, LX).
\end{tikzcd}$$

Вычисляя композицию стрелок, применённую к 1_{RLX}, получаем одним способом искомую композицию $LX \to LX$, а другим способом – тождественный морфизм.

Пусть теперь имеются морфизмы единицы и коединицы, для которых композиции

$$L \to LRL \to L \quad \text{и} \quad R \to RLR \to R$$

тождественны. Построим отображения между множествами $\mathrm{Hom}(LX, Y)$ и $\mathrm{Hom}(X, RY)$ для всех X, Y. Пусть $f\colon LX \to Y$. Сопоставим ему морфизм $X \to RY$, определённый как композиция $X \xrightarrow{\varepsilon_X} RLX \xrightarrow{Rf} Y$. Пусть $g\colon X \to RY$. Сопоставим ему морфизм $LX \to Y$, определённый как композиция $LX \xrightarrow{Lg} LRY \xrightarrow{\eta_Y} Y$. Очевидно, что эти отображения функториальны по X и Y. Для проверки того, что они взаимно обратны, нужно использовать условия про композиции.

Задача 5. Закончите доказательство. $\square$

Вернёмся к категориям модулей. Под модулем, как и прежде, мы понимаем левый модуль над фиксированным кольцом A. Через $A-\mathrm{Mod}$ мы обозначаем категорию левых A-модулей. Отметим, что множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(M, N)$ в этой категории обладает структурой абелевой группы (а если кольцо A коммутативно, то и структурой A-модуля).

Функтор $F\colon A-\mathrm{Mod} \to B-\mathrm{Mod}$ называется *аддитивным*, если он линеен на морфизмах, т.е. отображение $F\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(F(M), F(N))$ – гомоморфизм групп для всех M, N.

Задача 6. a) Докажите, что функтор $F\colon A-\mathrm{Mod} \to B-\mathrm{Mod}$ аддитивен тогда и только тогда, когда $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$ для всех M, N.

b) Если $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ – сопряжённые функторы, то L сохраняет копроизведения, а R – произведения.

c) Как следствие, сопряжённый функтор всегда аддитивен.

Пример неаддитивного функтора: тензорные, симметрические и внешние степени, например $M \mapsto M \otimes M$. Нас, однако, будут интересовать только аддитивные функторы, такие как Hom и $\otimes$, и мы будем предполагать в дальнейшем, что все рассматриваемые функторы аддитивны.

Напомним, последовательность называется *точной*, если когомологии её, рассмотренной как комплекс, нулевые, т.е. образ любой входящей стрелки совпадает с ядром выходящей.

Функтор (ковариантный) F называется *точным*, если для любой точной последовательности $K \to L \to M$ последовательность $F(K) \to F(L) \to F(M)$ точна. Функтор называется *точным слева* (соответственно *точным справа*), если для любой точной тройки $0 \to K \to L \to M \to 0$ последовательность $0 \to F(K) \to F(L) \to F(M)$ точна (соответственно последовательность $F(K) \to F(L) \to F(M) \to 0$ точна). Контравариантный функтор называется точным/точным слева/точным справа, если он точен/точен слева/точен справа как функтор $(A-\mathrm{Mod})^\circ \to B-\mathrm{Mod}$.

Примеры: тождественный и нулевой функторы точны. Функтор Hom точен слева по каждому из аргументов.

Предложение 2. *Пусть N – модуль. Тогда функторы $\mathrm{Hom}(N, -)$ и $\mathrm{Hom}(-, N)$ точны слева.*

Доказательство. Точность слева функтора $\mathrm{Hom}(N, -)$ более-менее очевидна.

Пусть $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ – точная тройка. Проверим, что последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(L, N) \to \mathrm{Hom}(K, N)$ точна. 1) если $h\colon M \to N$ и $hg = 0$, то $h = 0$ так как g сюръективно. 2) если $h\colon L \to N$ и $hf = 0$, то $h\,|_{\mathrm{im}\, f} = 0$. Так как $\mathrm{im}\, f = \ker g$, $h\,|_{\ker g} = 0$ и значит h имеет вид $h'g$ для некоторого $h'\colon M \to N$. $\square$

Задача 7. Докажите, что точный слева функтор F переводит a) инъективные морфизмы в инъективные; b) точную последовательность вида $0 \to K \to L \to M$ в точную последовательность $0 \to F(K) \to F(L) \to F(M)$. Аналогично для точности справа.

Имеет место следующий критерий:

Лемма 3. 1. *Последовательность $0 \to K \to L \to M$ точна тогда и только тогда, когда для всех X точна последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(X, K) \to \mathrm{Hom}(X, L) \to \mathrm{Hom}(X, M)$.*

2. *Последовательность $K \to L \to M \to 0$ точна тогда и только тогда, когда для всех X точна последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(M, X) \to \mathrm{Hom}(L, X) \to \mathrm{Hom}(K, X)$.*

Доказательство. Доказательство в прямую сторону следует из предыдущей задачи. Доказательство в обратную сторону в случае 1) очевидно: возьмём $X = A$. $\square$

Задача 8. Докажите критерий в случае 2) в обратную сторону.

Предложение 4. *Пусть M – правый A-модуль. Тогда функтор тензорного умножения $M \otimes_A -\colon A{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{Z}{-}\mathrm{Mod}$ точен справа.*

Проще всего это проверять при помощи утверждения о сопряжёности функторов $M \otimes_A -\colon A{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{Z}{-}\mathrm{Mod}$ и $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, -)\colon \mathbb{Z}{-}\mathrm{Mod} \to A{-}\mathrm{Mod}$ и следующей леммы

Лемма 5. *Пусть F (левый) и G (правый) – сопряжённые функторы между категориями модулей. Тогда F точен справа, а G – слева.*

Доказательство. Проверим, что F точен справа. Пусть $K \to L \to M \to 0$ – точная последовательность. Точность $F(K) \to F(L) \to F(M) \to 0$ следует по предыдущей лемме из точности

$$0 \to \mathrm{Hom}(F(M), X) \to \mathrm{Hom}(F(L), X) \to \mathrm{Hom}(F(K), X)$$

при всех X. По сопряжённости, последняя последовательность изоморфна

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, G(X)) \to \mathrm{Hom}(L, G(X)) \to \mathrm{Hom}(K, G(X)),$$

которая точна. $\square$

Точная тройка называется *расщепимой*, если она изоморфна точной тройке вида $0 \to K \to K \oplus M \to M \to 0$, где морфизмы – вложение и проекция.

Задача 9. Проверьте, что точная тройка $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ расщепима тогда и только тогда, когда выполнено любое условие из a) f имеет левый обратный; b) g имеет правый обратный; c) для любого функтора F тройка $0 \to F(K) \to F(L) \to F(M) \to 0$ точна.

Модуль P называется *проективным*, если функтор $\mathrm{Hom}(P, -)$ точен. Двойственным образом, модуль I называется *инъективным*, если точен функтор $\mathrm{Hom}(-, I)$.

Эти свойства полезно переформулировать так: P проективен/I инъективен, если в любой соответствующей диаграмме

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ L \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[dl, dashed] \\ & I & \end{tikzcd}$$

всегда существует пунктирная стрелка, замыкающая диаграмму.

Несложно проверить следующие свойства: $\oplus P_i$ проективен тогда и только тогда, когда все P_i проективны, $\prod I_i$ инъективен тогда и только тогда, когда все I_i инъективны. Простейший пример проективного модуля – свободный, примеры инъективных модулей мы построим чуть позднее. Как нетрудно увидеть, любой проективный модуль – прямое слагаемое свободного.

Задача 10. Приведите пример проективного не свободного модуля.

Левой резольвентой модуля M называется комплекс вида

$$\dots P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0,$$

у которого $H_i(P) = 0$ при $i \neq 0$ и $H_0(P) = M$. Положив $P_{-1} = M$, резольвенту можно достроить до ацикличного комплекса

$$\dots P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Правой резольвентой модуля M называется комплекс вида

$$0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots,$$

у которого $H^i(I) = 0$ при $i \neq 0$ и $H^0(I) = M$. Левая резольвента называется *проективной*, если все её члены – проективные модули. Аналогично, правая резольвента называется *инъективной*, если все её члены – инъективные модули.

Примеры: $\mathbb{Z} \xrightarrow{7} \mathbb{Z}$ – проективная резольвента $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

$$\mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{(-y,x)} \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{\binom{x}{y}} \mathsf{k}[x,y]$$

– проективная резольвента $\mathsf{k}[x,y]$-модуля $\mathsf{k} = \mathsf{k}[x,y]/(x,y)$. Вообще, для регулярной последовательности $a_1, \dots, a_r \in A$ комплекс Кошуля строит резольвенту A-модуля $A/(a_1, \dots, a_r)$. Bar-резольвента – это резольвента B как B-B-бимодуля. Как мог заметить внимательный слушатель, все приведённые примеры – свободные резольвенты.

Часто говорят, что в категории модулей над кольцом *достаточно много* проективных и инъективных модулей. Вот что это значит:

Лемма 6. *Любой модуль над кольцом – фактормодуль проективного и подмодуль инъективного.*

Доказательство. Про проективные модули очевидно – любой модуль M можно накрыть свободным с достаточно большим числом образующих, например, модулем $\oplus_{m\in M} Ae_m$: образующая e_m переходит в $m \in M$. Доказательство того, что инъективных модулей достаточно много, мы пока отложим. □

Предложение 7. *У любого модуля есть проективная и инъективная резольвенты.*

Доказательство. Рассмотрим проективный случай. Накроем заданный модуль M проективным модулем P_0. Пусть Z_0 – ядро $d_0 \colon P_0 \to M$. Накроем Z_0 проективным P_1 и рассмотрим сквозное отображение $d_1 \colon P_1 \to Z_0 \to P_0$. $\operatorname{im} d_1 = Z_0 = \ker d_0$, так что в 0-м члене комплекс $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ точен. Далее накроем ядро d_1 проективным модулем P_2 и т.д. □

Далее, морфизм модулей можно продолжить до морфизма резольвент. Верно даже несколько более общее утверждение.

Предложение 8. *Пусть $P_\bullet$ – комплекс проективных модулей с $P_i = 0$ при $i < 0$ и $H_0(P) = M$, $K_\bullet$ – резольвента модуля N, $f \colon M \to N$ – гомоморфизм. Тогда существует морфизм комплексов $f_\bullet \colon P_\bullet \to K_\bullet$, индуцирующий f на H_0.*

Доказательство. Добавим к $P_\bullet$ и $K_\bullet$ (-1)-е члены M и N.

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"'] \arrow[dr, bend left, "f_0 d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] \arrow[dr, bend left, "f d_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
K_2 \arrow[r, "d_2"] & K_1 \arrow[r, "d_1"] & K_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Теперь построим f_0. Так как P_0 проективен и d_0^K сюръективен, существует $f_0\colon P_0 \to K_0$ такой, что $d_0^K f_0 = f d_0^P$. Далее, $f_0 d_1^P$ попадает в $\ker d_0^K$, а значит, в $\operatorname{im} d_1^K$. Т.к. P_1 проективен, существует $f_1\colon P_1 \to K_1$ такой, что $d_1^k f_1 = f_0 d_1^P$. И так далее. $\square$

Конечно, у модуля есть много разных проективных резольвент. Однако, если рассматривать морфизмы комплексов с точностью до гомотопии, то резольвента единственна (с точностью до изоморфизма) и даже функториальна. Слушатель может этот факт проверить вручную, в стиле предыдущего доказательства, мы же приведём более концептуальное рассуждение. Для этого понадобится некоторая подготовка.

Лемма 9. *Любой морфизм $f^\bullet$ из ограниченного справа комплекса проективных модулей $P^\bullet$ в ацикличный комплекс $K^\bullet$ гомотопен* 0.

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
P^{i-1} \arrow[r] & P^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"] \arrow[dl, dashed, "h^i"'] & P^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] \arrow[dl, "h^{i+1}"'] & P^{i+2} \arrow[dl, "h^{i+2}"'] \\
K^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d^i"] & K^{i+1} \arrow[r] & K^{i+2}
\end{tikzcd}$$

Будем строить гомотопии $h^i\colon P^i \to K^{i-1}$ по очереди, начиная справа. Пусть $h^{i+1}, h^{i+2}, \ldots$ построены. Обозначим разность $g^i = f^i - h^{i+1}d^i$, тогда $d_i g_i = d^i f^i - d^i h^{i+1} d^i = f^{i+1} d^i - d^i h^{i+1} d^i = (f^{i+1} - d^i h^{i+1}) d^i = h^{i+2} d^{i+1} d^i = 0$, значит образ g^i лежит в $\operatorname{im} d^{i-1} = \ker d^i$. По проективности P_i, g^i имеет вид $d^{i-1} h^i$, что и требовалось. $\square$

Напомним, что для любых комплексов $K^\bullet$ и $L^\bullet$ на первой лекции был определён комплекс морфизмов $\underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^\bullet$. А именно,

$$\underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^i = \prod_n \mathrm{Hom}(K^n, L^{n+i}),$$

а дифференциал d^i переводит семейство $(f^n) \in \underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^i$ в семейство $(g^n) \in \underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^{i+1}$, где $g^n = df^n - (-1)^i f^{n+1} d$. Несложно посчитать его коциклы, кограницы и когомологии:

- $Z^i(\underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(A)}(K, L[i]) = \{$морфизмы комплексов из K в $L[i]\}$;
- $B^i(\underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^\bullet) = \{$морфизмы из K в $L[i]$, гомотопные нулю$\}$;
- $H^i(\underline{\mathrm{Hom}}(K, L)^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(A)}(K, L[i]) = \{$морфизмы из K в $L[i]$ по модулю гомотопии$\}$.

Мы будем использовать стандартное обозначение:

$$\mathrm{Hom}^i(K^\bullet, L^\bullet) := \mathrm{Hom}(K^\bullet, L[i]^\bullet).$$

Лемма 10. *Пусть $f^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$ – морфизм комплексов. Тогда для любого комплекса $X^\bullet$ имеется длинная точная последовательность*

$$\begin{aligned}\ldots \to \mathrm{Hom}^{i-1}_{\mathrm{K}(A)}(X^\bullet, C(f)^\bullet) &\to \\ \to \mathrm{Hom}^{i}_{\mathrm{K}(A)}(X^\bullet, K^\bullet) \to \mathrm{Hom}^{i}_{\mathrm{K}(A)}(X^\bullet, L^\bullet) &\to \mathrm{Hom}^{i}_{\mathrm{K}(A)}(X^\bullet, C(f)^\bullet) \to \\ &\to \mathrm{Hom}^{i+1}_{\mathrm{K}(A)}(X^\bullet, K^\bullet) \to \ldots,\end{aligned}$$

где $\mathrm{Hom}^{i}_{\mathrm{K}(A)}(X^\bullet, Y^\bullet)$ обозначает группу морфизмов из $X^\bullet$ в $Y[i]^\bullet$ по модулю морфизмов, гомотопных нулю.

Доказательство. Рассмотрим расщепимую почленно точную последовательность комплексов $0 \to L^\bullet \to C(f)^\bullet \to K[1]^\bullet \to 0$. По ней строится последовательность комплексов морфизмов

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}(X^\bullet, L^\bullet) \to \underline{\mathrm{Hom}}(X^\bullet, C(f)^\bullet) \to \underline{\mathrm{Hom}}(X^\bullet, K[1]^\bullet) \to 0.$$

Она точная, так как $\mathrm{Hom}(X^i, -)$ в расщепимую точную тройку точен. Применяя длинную точную последовательность в когомологиях, получаем требуемое, так как когомологии комплекса морфизмов – это морфизмы комплексов по модулю морфизмов, гомотопных нулю. □

Наконец, можно сформулировать и доказать

Предложение 11. *Пусть $P_\bullet$ – проективная резольвента модуля M, $Q_\bullet$ – какая-то левая резольвента модуля N. Тогда любой гомоморфизм $f\colon M \to N$ продолжается до морфизма резольвент $P_\bullet \to Q_\bullet$, причём единственным с точностью до гомотопии образом.*

Доказательство. Рассмотрим морфизм $f\colon Q_\bullet \to N[0]$. Этот морфизм – квазиизоморфизм, значит его конус $C_\bullet$ ацикличен (на самом деле этот конус – не что иное, как резольвента $Q_\bullet$, дополненная справа членом N). По лемме 9 морфизмы из $P_\bullet$ во все сдвиги $C_\bullet$ гомотопны нулю. Значит, по лемме 10 имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(A)}(P_\bullet, Q_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(A)}(P_\bullet, N[0]).$$

Однако между морфизмами комплексов $P_\bullet$ и $N[0]$ не может быть гомотопий, а сами такие морфизмы однозначно задаются гомоморфизмом $M = P_0/d_1(P_1) \to N$. Значит, морфизмы из $P_\bullet$ в $Q_\bullet$ по модулю гомотопии биективно соответствуют гомоморфизмам модулей $M \to N$. □

Если применить это предложение к двум проективным резольвентам одного модуля и тождественному гомоморфизму из этого модуля в себя, получим, что эти резольвенты гомотопически эквивалентны.

Доказанное в предыдущем предложении можно ещё сформулировать так:

Следствие 12. *Взятие проективной резольвенты задаёт функтор из категории модулей в гомотопическую категорию комплексов.*