18.02.2016
Лекция 2

Категории и функторы

Теория категорий почти не содержит теорем, но её язык чрезвычайно удобен и позволяет компактно формулировать и эффективно доказывать различные утверждения.

Если между объектами некоторого типа есть хорошо определённые морфизмы, то такие объекты образуют категорию. По определению, *категория* $\mathcal{C}$ состоит из:

- класса объектов $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- множества морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ для любых объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- закона композиции $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) : (f, g) \mapsto f \circ g$,

при этом должны быть выполнены свойства:

1. ассоциативность композиции: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (если композиции имеют смысл);
2. существование тождественного эндоморфизма для любого объекта A: такого $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, что $1_A \circ f = f$ и $f \circ 1_A = f$ (тогда, когда композиция имеет смысл).

Примеры категорий:

1. категория множеств $\mathcal{S}ets$: объекты – множества, морфизмы – отображения между множествами;
2. категория групп $\mathcal{G}rp$: объекты – группы, морфизмы – гомоморфизмы групп;
3. категория $A{-}\mathrm{Mod}$ левых модулей над кольцом A: объекты – A-модули, морфизмы – гомоморфизмы A-модулей;
4. категория $\mathrm{Kom}(A{-}\mathrm{Mod})$ комплексов A-модулей: объекты – комплексы A-модулей, морфизмы – морфизмы комплексов A-модулей;
5. категория топологических пространств $\mathcal{T}op$: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения топологических пространств;
6. категория гладких многообразий $\mathcal{S}m$: объекты – гладкие многообразия, морфизмы – гладкие отображения гладких многообразий;
7. *дискретная категория* – любое множество можно рассматривать как категорию: объекты – элементы множества, морфизмы – по одному тождественному морфизму для каждого элемента;
8. любое частично упорядоченное множество можно рассматривать как категорию: объекты – элементы множества, из A в B есть единственный морфизм тогда и только тогда, когда $A \leqslant B$;
9. по любому ориентированному графу можно построить категорию: объекты – вершины, морфизмы – цепочки последовательно идущих рёбер;
10. любую группу можно рассматривать как категорию: объект единственный, а в качестве его морфизмов в себя берётся группа;
11. ...

Начальным объектом категории $\mathcal{C}$ называется такой объект I, что множество $\mathrm{Hom}(I,X)$ состоит из одного элемента для всех объектов X в $\mathcal{C}$. Двойственным образом, *конечный* объект категории $\mathcal{C}$ – это такой объект T, что множество $\mathrm{Hom}(X,T)$ состоит из одного элемента для всех объектов X.

Примеры: в категории множеств начальный объект – пустое множество, конечный объект – множество из одного элемента. В категории групп группа из одного элемента – это и начальный, и конечный объект. В категории колец начальный объект – кольцо целых чисел, а конечного объекта не существует. В категории "упорядоченное множество" начальный и конечный объекты – это наименьший и наибольший элементы (если они существуют).

Есть и более содержательные примеры.

Задача 1. Опишите начальный и конечный объекты в следующих категориях. a) Пусть $f\colon M\to N$ – гомоморфизм модулей. Объекты – пары (X,u), где X – модуль, а $u\colon X\to M$ – такой гомоморфизм, что $fu=0$. Морфизмы из (X_1,u_1) в (X_2,u_2) – такие гомоморфизмы $g\colon X_1\to X_2$, что $u_2g=u_1$.

b) Пусть X – топологическое пространство, Y – множество, $f\colon X\to Y$ – отображение. Объекты – пары (Z,v), где Z – топологическое пространство, $v\colon Y\to Z$ – отображение множеств такое, что композиция vf непрерывна. Морфизмы из (Z_1,v_1) в (Z_2,v_2) – такие непрерывные отображения $g\colon Z_1\to Z_2$, что $gv_1=v_2$.

Задача 2. Докажите, что начальный и конечный объекты в категории, если он есть, единствен с точностью до изоморфизма.

Двойственной категорией $\mathcal{C}^\circ$ к категории $\mathcal{C}$ называется "категория $\mathcal{C}$ с обращёнными стрелками": $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\circ=\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$.

Если операция, применяемая к объектам некоторой категории, может быть естественно продолжена и на морфизмы, то такая операция называется функториальной.

(Ковариантный) функтор F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ состоит из:

1. действия на объектах – правила, сопоставляющего каждому объекту $A\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ некоторый объект $F(A)\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$;

2. действия на морфизмах – отображения $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$ для всякой пары $A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;

при этом действие на морфизмы должно сохранять композицию и единицу: $F(\phi\psi)=F(\phi)F(\psi)$ и $F(1_A)=1_{F(A)}$. *Контравариантный функтор* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ – это по определению ковариантный функтор из $\mathcal{C}^\circ$ в $\mathcal{D}$.

Примеры:

1. Забывание: "тождественные" функторы $\mathcal{G}rp\to\mathcal{S}ets$, $\mathcal{T}op\to\mathcal{S}ets$, $\mathcal{S}m\to\mathcal{T}op$, $A-\mathrm{mod}\to\mathbb{Z}-\mathrm{mod}$;

2. двойственность (контравариантный функтор из категории k-векторных пространств в себя): $V\mapsto V^*$;

3. i-е сингулярные гомологии $\mathcal{T}op\to\mathcal{A}b$: $X\mapsto H_i(X,\mathbb{Z})$;

4. i-е сингулярные когомологии (контравариантный функтор) $\mathcal{T}op\to\mathcal{A}b$: $X\mapsto H^i(X,\mathbb{Z})$;

5. i-е гомотопические группы (функтор из категории топологических пространств с отмеченной точкой в группы): $(X,x)\mapsto\pi_i(X,x)$;

6. тензорные/симметрические/внешние степени модуля над коммутативным кольцом;

7. функтор Галуа (контравариантный) из категории расширений Галуа поля k (морфизмы – включения) в группы: $K \mapsto Gal(K/\mathsf{k})$

8. ...

Многие известные определения можно сказать на языке функторов. Например, представление группы G над полем k – это всё равно, что функтор из категории 10 из списка в категорию векторных пространств. Предпучок множеств (абелевых групп, колец, ...) на топологическом пространстве X – это всё равно, что контравариантный функтор из категории открытых подмножеств X в категорию множеств (абелевых групп, колец, ...) Коммутативный квадрат в категории $\mathcal{C}$ – это всё равно, что функтор из категории

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

в категорию $\mathcal{C}$.

Очевидным образом определяются композиция функторов и тождественный функтор, а также изоморфизм категорий. Однако изоморфизмы категорий достаточно редки, к этому мы ещё вернёмся.

Прямое произведение категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ определяется как категория $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, объекты которой – пары (A, B), где $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, а морфизмы из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) – это $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(B_1, B_2)$.

Пусть $\mathcal{C}$ – категория. Определим функтор $\operatorname{Hom}\colon \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$:
на объектах $(A, B) \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, на морфизмах $(f, g) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C}}((A_1, B_1), (A_2, B_2))$ переходит в

$$u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}ets}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, B_1), \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A_2, B_2)),$$

где для $h \in \operatorname{Hom}(A_1, B_1)$ имеем $u(h) = ghf \in \operatorname{Hom}(A_2, B_2)$:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h"] & B_1 \arrow[d, "g"] \\ A_2 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u(h)"] & B_2 \end{tikzcd}.$$

Проверим, что Hom – действительно функтор. Пусть (f_1, g_1) – морфизм из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) (где $f_1 \in \operatorname{Hom}(A_2, A_1)$, а $g_1 \in \operatorname{Hom}(B_1, B_2)$), а (f_2, g_2) – морфизм из (A_2, B_2) в (A_3, B_3). Тогда их композиция – морфизм $(f_1 f_2, g_2 g_1)$. Функтор Hom переводит эти три морфизма в морфизмы $u\colon \operatorname{Hom}(A_1, B_1) \to \operatorname{Hom}(A_2, B_2)$, $v\colon \operatorname{Hom}(A_2, B_2) \to \operatorname{Hom}(A_3, B_3)$ и $w\colon \operatorname{Hom}(A_1, B_1) \to \operatorname{Hom}(A_3, B_3)$, необходимо проверить, что $vu = w$. Возьмём элемент $h \in \operatorname{Hom}(A_1, B_1)$. По определению, $u(h) = g_1 h f_1$, $v(u(h)) = g_2(g_1 h f_1) f_2$, а $w(h) = (g_2 g_1) h (f_1 f_2)$, то есть, всё сошлось.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h"] & B_1 \arrow[d, "g_1"'] \arrow[dd, bend left, "g_2 g_1"] \\ A_2 \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "g_1 h f_1"] & B_2 \arrow[d, "g_2"'] \\ A_3 \arrow[u, "f_2"] \arrow[uu, bend left, "f_1 f_2"] \arrow[r, "g_2 g_1 h f_1 f_2"] & B_3 \end{tikzcd}$$

Наконец, определим морфизмы функторов.

Пусть F и G – функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$. *Морфизмом функторов* или *естественным преобразованием функторов* из F в G называется семейство морфизмов $\phi(A)\colon F(A) \to G(A)$, по одному для каждого объекта A в $\mathcal{C}$, такое, что для любого морфизма $f\colon A \to B$ в $\mathcal{C}$ диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\phi(A)"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\phi(B)"] & G(B). \end{tikzcd}$$

Композиция морфизмов функторов и тождественный автоморфизм функтора определяются очевидным образом. Тем самым, определено понятие изоморфизма функторов.

Рассмотрим категорию точных троек комплексов: объекты – точные тройки комплексов модулей над фиксированным кольцом, морфизмы – коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & L_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & M_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_2^\bullet \arrow[r] & L_2^\bullet \arrow[r] & M_2^\bullet \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Задача 3. Проверьте, что $H^i(K), H^i(L), H^i(M)$ – функторы на введённой категории, а связывающий гомоморфизм $\delta^i\colon H^i(M) \to H^{i+1}(K)$ – морфизм функторов.

Задача 4. Пусть A – коммутативное кольцо, Ω – фиксированный A-модуль. Определим функтор дуализации (контравариантный) $*\colon X \mapsto \mathrm{Hom}_A(X, \Omega)$.

a) Постройте морфизм функторов $\mathrm{Id}_{A-\mathrm{mod}} \to **$; b) Проверьте, что этот морфизм – изоморфизм для категории конечномерных k-векторных пространств и $\Omega = \mathsf{k}$.

Нам будет важен следующий пример. Определим *гомотопическую категорию комплексов* $\mathrm{K}(A{-}\mathrm{Mod})$. Её объекты – комплексы A-модулей, а морфизмы – морфизмы комплексов по модулю гомотопии, то есть

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(A-\mathrm{Mod})}(K^\bullet, L^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(A-\mathrm{Mod})}(K^\bullet, L^\bullet)/\{\text{морфизмы, гомотопные нулю}\}.$$

Для определения композиции в такой категории нужно показать, что при изменении одного из двух компонируемых морфизмов на морфизм, гомотопный нулю, композиция также изменяется на морфизм, гомотопный нулю. Это несложное упражнение было предложено на прошлой лекции.

Отметим, что имеется тавтологический функтор $\mathrm{Kom}(A{-}\mathrm{Mod}) \to \mathrm{K}(A{-}\mathrm{Mod})$. Также заметим, что взятие i-й когомологии определяет функтор H^i на категории $\mathrm{Kom}(A{-}\mathrm{Mod})$ в категорию $A{-}\mathrm{Mod}$. Его можно продолжить до функтора на гомотопической категории:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Kom}(A-\mathrm{Mod}) \arrow[r, "H^i"] \arrow[d] & A-\mathrm{Mod}. \\ \mathrm{K}(A-\mathrm{Mod}) \arrow[ur, dashed, "H^i"'] & \end{tikzcd}$$

Действительно, на объектах (т.е. комплексах) этот функтор определён. Для определения его на морфизмах нужно показать, что гомотопные морфизмы комплексов индуцируют одинаковые отображения на когомолгиях – а это было показано на прошлой лекции.

Также отметим, что введённые на прошлой лекции гомотопические эквивалентности – это изоморфизмы в категории $\mathrm{K}(A{-}\mathrm{Mod})$. А гомотопически эквивалентные комплексы – всего лишь изоморфные объекты в этой категории.

Пусть X – объект некоторой категории $\mathcal{C}$. Определим функтор точек $h^X\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{S}ets$ равенствами:

$$h^X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$$

на объектах,

$$h^X(f)(-) = - \circ f\colon\ \mathrm{Hom}(Y_1, X) \to \mathrm{Hom}(Y_2, X)$$

для морфизма $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y_2, Y_1)$. Функтор $\mathcal{C}^\circ \to \mathcal{S}ets$, изоморфный функтору h^X для некоторого X, называется *представимым*, а X называется объектом, *представляющим* этот функтор.

Задача 5. Дайте определения функтора ко-точек h_X и копредставимого функтора.

Задача 6 (лемма Йонеды). a) Пусть $F\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{S}ets$ – функтор, а X – объект $\mathcal{C}$. Постройте биекцию между множеством морфизмов функторов из h^X в F и множеством $F(X)$. b) Проверьте, что $\mathrm{Hom}_{Fun}(h^X, h^Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (первое множество – морфизмы функторов). c) Проверьте, что объект, представляющий представимый функтор, определён однозначно с точностью до изоморфизма.

Допуская некоторую вольность, можно сказать, что сопоставление $X \mapsto h^X$ задаёт вложение категории $\mathcal{C}$ в категорию контравариантных функторов $\mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$.

Многие конструкции удобно описывать на языке представимых функторов.

Пусть $X_i, i \in I$ – некоторое множество объектов категории $\mathcal{C}$. *Произведением* X_i называется объект, представляющий функтор $\prod_i \mathrm{Hom}(-, X_i)$. *Копроизведением* X_i называется объект, копредставляющий функтор $\prod_i \mathrm{Hom}(X_i, -)$. По лемме Йонеды произведение и копроизведение определены однозначно, если существуют. Обозначения: $\prod_i X_i$ и $\coprod_i X_i$.

Примеры: произведение в категории множеств – это прямое произведение, копроизведение в категории множеств – это несвязное объединение. Произведение и копроизведение в категории модулей над кольцом называются прямым произведением и прямой суммой, они изоморфны для конечного числа слагаемых. Произведение и копроизведение в категории подмножеств фиксированного множества – это пересечение и объединение.

Задача 7. Опишите произведение и копроизведение в категории a) коммутативных колец; b) колец; c) частично упорядоченных множеств; d) упорядоченных множеств; e) где объекты – натуральные числа, из m в n есть единственный морфизм, если $m|n$.

Задача 8. Дайте определения начального и конечного объекта категории через представимые функторы.

Ещё примеры: тензорное произведение модулей M и N – это модуль, копредставляющий функтор $X \mapsto$ множество билинейных отображений$M \times N \to X$. Тензорная алгебра k-векторного пространства V – это объект, копредставляющий функтор $A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}-vect}(V, A)$ на категории ассоциативных k-алгебр.