НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 23.05.2016.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо <u>*не позднее*</u>*, чем 17:30 6 июня, отдать мне или положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем.*

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач.

Задача 1. Поверхность называется *линейчатой,* если она параметрически задается в виде $\vec{r}(u,v)=\vec{\rho}(u)+v\vec{a}(u)$. Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна *(5 баллов).*

Задача 2. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости *(10 баллов).*

Задача 3. Доказать, что в любой точке p группы Ли G с биинвариантной метрикой секционная кривизна в направлении любой 2-плоскости в T_pG неотрицательна *(10 баллов).*

Задача 4. Пусть $[z_0:\dots:z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что *отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d:\mathbb{R}P^n\longrightarrow\mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0:\ldots:z_n])=[\ldots:z^I:\ldots],\tag{1}$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0,\ldots,z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n=2$ и $d=2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2\longrightarrow\mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0:z_1:z_2])=[z_0^2:z_1^2:z_2^2:z_0z_1:z_0z_2:z_1z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^*\gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. *(10 баллов).*

Задача 5. Подмногообразие M риманова многообразия N с индуцированной метрикой называется вполне геодезическим, если все геодезические M являются в то же время и геодезическими N. Доказать, что M вполне геодезическое тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма нулевая. *(5 баллов).*

Задача 6. Найдите $\mathrm{ch}(\xi_k)$, где ξ_k есть тривиальное расслоение ранга k *(5 баллов).*

Задача 7. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W, то все числа Понтрягина M равны нулю. *(10 баллов).*

Указание. Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.

Задача 8*. Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}),[\mathbb{S}^4]\rangle=\oint_{\mathbb{S}^4}p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}),$$

где $\gamma^1_{\mathbb{H}}=(E\longrightarrow\mathbb{H}P^1\simeq S^4)$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция овеществления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) *(25 баллов).*