Листок 4а. 23 марта 2016

Задача 1. Рассмотрим в комплексной плоскости полуполосу

$$\{x+\sqrt{-1}y \in \mathbb{C} \mid x>0, 0<y<\pi\}.$$

Докажите, что *гиперболический косинус* $\operatorname{ch}(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ переводит эту полуполосу в верхнюю полуплоскость. Нарисуйте образ сетки, состоящей из вертикальных отрезков и горизонтальных лучей, при таком отображении. Найдите прообразы углов этой полуполосы.

Задача 2. Рассмотрим голоморфное отображение $f\colon \mathbb{H} \to Q$ из верхней полуплоскости в многоугольник, которое непрерывно продолжается на границу. Что можно сказать про значения производной f' в прообразах углов этого многоугольника? Про значения производной между этими прообразами? Покажите, что если углы между всеми сторонами Q и вещественной осью кратны $\frac{\pi}{n}$, то функция $(f')^n$ принимает на вещественной оси вещественные значения.

Задача 3. Пользуясь задачами 1 и 2, покажите, что производная гиперболического арккосинуса есть первообразная квадратного корня из вещественной функции, имеющей особенности в точках -1 и 1. Выведите отсюда, что гиперболический арккосинус может быть представлен в виде

$$\int \frac{K dw}{\sqrt{(w-1)(w+1)}}.$$

Вычислите K.

Задача 4. Рассмотрим эллипс с уравнением $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$.
(а) Докажите, что его периметр равен $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$, где $k=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}$.
(б) Рассмотрим функцию $F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$. Геометрически это длина дуги эллипса, получающейся из дуги окружности длины φ при помощи подходящего аффинного преобразования. После замены $x=\sin\varphi$, $t=\sin\theta$ она примет вид $\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$. Опишите фигуру, в которую переводит F_k верхнюю полуплоскость.
(в) Докажите, что образ верхней полуплоскости относительно отображения

$$z \mapsto \sqrt{2}F_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sqrt{z+1})$$

есть единичный квадрат.

Задача 5. Пусть sn_k — функция, обратная к F_k, иными словами, если $u=\int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$, то $\operatorname{sn}u=\sin\varphi$. Положим также $\operatorname{cn}u=\cos\varphi$ и $\operatorname{dn}u=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$. Эти функции называются *эллиптическими функциями Якоби*.
(а) Найдите производные эллиптических функций Якоби.
(б) Докажите, что эллиптические функции Якоби двоякопериодичны.
(в) Докажите, что $\operatorname{cn}^2+\operatorname{sn}^2=1$ и $\operatorname{dn}^2+k^2\operatorname{sn}^2=1$. Выведите отсюда, что пересечение цилиндров с уравнениями $x^2+y^2=t^2$ и $z^2+k^2y^2=t^2$ в трёхмерном комплексном пространстве есть *эллиптическая кривая* (фактор $\mathbb{C}$ по решётке).