

Топология-1, семинар 7, 23.03.2015.

Задача 1. Найти фундаментальную группу дополнения окружности в \mathbb{R}^3 .

Задача 2. Найти фундаментальную группу дополнения трёх координатных осей в \mathbb{R}^3 .

Задача 3. Докажите, что дополнение двух незацепленных окружностей в \mathbb{R}^3 не гомеоморфно дополнению двух зацепленных окружностей.

Задача 4. Описать ядро гомоморфизма абелианизации $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Задача 5. Покажите, что гомоморфизм $\Phi: *_{\alpha} \pi_1(A_{\alpha}) \rightarrow \pi_1(X)$ может быть не сюръективным, если не все пересечения $A_{\alpha} \cap A_{\beta}$ линейно связны.

Задача 6. Пусть даны гомоморфизмы групп $f_1: H \rightarrow G_1$ и $f_2: H \rightarrow G_2$. Определим *амальгамированное произведение* $G_1 *_H G_2$ групп G_1 и G_2 над H как факторгруппу свободного произведения $G_1 * G_2$ по нормальной подгруппе, порождённой всеми элементами вида $f_1(h)f_2(h)^{-1}$, где $h \in H$.

Докажите, что $G_1 *_H G_2$ входит в кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow \\ G_2 & \longrightarrow & G_1 *_H G_2, \end{array}$$

т.е. обладает соответствующим универсальным свойством.

Задача 7. Пусть $X = A_1 \cup A_2$, где X — клеточное пространство, A_1, A_2 — клеточные подпространства, причём пересечение $B = A_1 \cap A_2$ связно и содержит отмеченную точку $x_0 \in X$, которая является нульмерной клеткой. Мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ A_2 & \xrightarrow{j_2} & X, \end{array}$$

Вычисляя фундаментальную группу всех пространств в этой диаграмме и применяя универсальное свойство амальгамированного произведения (см. предыдущее упражнение), мы получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B) & \xrightarrow{(i_1)_*} & \pi_1(A_1) \\ \downarrow (i_2)_* & & \downarrow (j_1)_* \\ \pi_1(A_2) & \xrightarrow{(j_2)_*} & \pi_1(A_1) *__{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \end{array}$$

\swarrow
 \searrow
 $\xrightarrow{\quad h \quad}$
 $\pi_1(X)$

Используя теорему ван Кампена, докажите, что гомоморфизм

$$h: \pi_1(A_1) *__{\pi_1(B)} \pi_1(A_2) \rightarrow \pi_1(A_1 \cup_B A_2)$$

является изоморфизмом (мы имеем $X = A_1 \cup_B A_2$).