

## Листок 6

Рассмотрим в  $U \mathfrak{sl}(2)$  оператор Казимира:

$$C = ef + fe + \frac{1}{2}h^2.$$

**6.1.** Покажите, что  $C \in Z(U \mathfrak{sl}(2))$ .

УКАЗАНИЕ. Для этого достаточно показать, что  $xC = Cx$  для всех  $x \in \mathfrak{sl}(2)$ .

**6.2.** Согласно лемме Шура, оператор Казимира действует на неприводимом представлении  $V_n$  скаляром. Вычислите этот скаляр.

**6.3.** Найдите коммутанты алгебр  $\mathfrak{gl}(n)$ ,  $\mathfrak{sl}(n)$ ,  $\mathfrak{so}(n)$ . Являются ли они разрешимыми?

**6.4.** Пусть  $V$  конечномерное комплексное векторное пространство,  $A: V \rightarrow V$  — верхнетреугольный оператор. Пусть  $F_k \in \text{End}(V)$ , где  $-n \leq k \leq n$ , подпространство, порожденное матричными единицами  $E_{ij}$ , для которых  $i - j \leq k$ . Покажите, что  $(\text{ad } A)F_k \subset F_{k-1}$  и что оператор  $\text{ad } A: \text{End } V \rightarrow \text{End } V$  нильпотентен.