

Листок 4

Рассмотрим представление группы Ли $SL(2, \mathbb{C})$ в пространстве $V_n = \langle x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n \rangle$ бинарных форм степени n над полем \mathbb{C} .

4.1. Докажите, что это представление неприводимо.

4.2. Пусть $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — стандартный базис в алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Какими дифференциальными операторами эти элементы действуют на V_n ?

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите действие на V_n однопараметрических подгрупп, порожденных этими элементами.

4.3. Покажите, что V_2 изоморфно присоединенному представлению алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

4.4. Представление V_n группы $SL(2, \mathbb{C})$ ограничивается до (комплексного) представления ее вещественной формы $SU(2)$. При каких n это представление является представлением группы $SO(3, \mathbb{R})$?