Листок 6. Теория Струн

(Сканы/фото решений данного листка принимаются
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

В данном листке мы проделаем ряд упражнений, целью которых будет получение оператора пространственно временной-суперсимметрии с помощью $\mathcal{N}=2$ суперконформной алгебры.

Задача 1. $\mathcal{N}=2$ суперконформная алгерба. $\mathcal{N}=2$ суперконформная алгебра состоит из полей $T(z), G^{\pm}(z), J(z)$. Они имеют следующие операторные разложения

$$\begin{aligned}
T(z)T(0) &= \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) + \text{рег.},\\
T(z)G^{\pm}(0) &= \frac{3}{2z^2}G^{\pm}(0) + \frac{1}{z}\partial G^{\pm}(0) + \text{рег.},\\
T(z)J(0) &= \frac{1}{z^2}J(0) + \frac{1}{z}\partial J(0) + \text{рег.},\\
G^{+}(z)G^{-}(0) &= \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z^2}J(0) + \frac{2}{z}T(0) + \frac{1}{z}\partial J(0) + \text{рег.},\\
G^{\pm}(z)G^{\pm}(0) &= 0 + \text{рег.},\\
J(z)G^{\pm}(0) &= \pm\frac{1}{z}G^{\pm}(0) + \text{рег.},\\
J(z)J(0) &= \frac{c}{3z^2} + \text{рег.}.
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Замечание: Раньше мы всегда писали операторные разложения с полями в точках z, w. Однако, в силу трансляционной инвариантности одну из точек можно перенести в 0.

(а). Покажите, что эта алгебра содержит $\mathcal{N}=1$ суперконформную алгебру с токами $T(z), G(z) = (G^{+}+G^{-})/\sqrt{2}$ в качестве подалгебры.

(б). Разложите токи по модам

$$\begin{aligned}
G^{\pm}(z) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\pm\nu} G^{\pm}_r z^{-r-3/2},\\
T(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2},\\
J(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}
\end{aligned} \tag{0.2}$$

и покажите, что моды удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
[L_m, G^{\pm}_r] &= \left(\frac{m}{2} - r\right) G^{\pm}_{m+r},\\
[L_m, J_r] &= -nJ_{m+n},\\
\{G^{+}_r, G^{-}_s\} &= 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s}, 0,\\
\{G^{\pm}_r, G^{\pm}_s\} &= 0,\\
[J_n, G^{\pm}_r] &= \pm G^{\pm}_{r+n},\\
[J_m, J_n] &= \frac{c}{3}m\delta_{m+n,0}.
\end{aligned} \tag{0.3}$$

В этих формулах $m, n \in \mathbb{Z}$, а $r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \pm \nu$, где ν зависит от условий на монодромию $G^{\pm}(z)$:

$$G^{\pm}(e^{2\pi i} z) = e^{\pm 2\pi i \nu} G^{\pm}(z). \tag{0.4}$$

(в). Покажите, что у этой алгебры имеется автоморфизм

$$\begin{aligned}
U_\eta(L_n) &= L_n + \eta J_n + \frac{1}{6}\eta^2 c \delta_{n,0}, \\
U_\eta(J_n) &= J_n + \frac{1}{3}\eta \delta_{n,0}, \\
U_\eta(G_r^{\pm}) &= G_{r \pm \eta}^{\pm}.
\end{aligned}$$

(г). Этот автоморфизм имеет следующую реализацию в терминах вертексных операторов. Бозонизуем ток J.

$$J(z) = \partial \phi, \quad \text{где} \quad \phi(z)\phi(0) = \frac{c}{3} \ln z + \text{рег.}. \tag{0.5}$$

Рассмотрим произвольный оператор V, имеющий заряд q, и запишем его в виде

$$V = \hat{V} e^{i \frac{3q}{c} \phi}, \tag{0.6}$$

где $\hat{V}$ является нейтральным относительно $J(z)$. Соответствующая процедура для токов $G^{\pm}(z)$ дает

$$G^{\pm} = \hat{G}^{\pm} e^{\pm \frac{3}{c} \phi}. \tag{0.7}$$

С помощью бозонного поля ϕ мы можем осуществить автоморфизм (0.5) домножением всех вертексных операторов нашей теории на экспоненту $\exp(\eta\phi)$. Для каждого поля V в нашем представлении суперконформной алгебры мы можем написать соответствующий оператор твистованный на η:

$$V_\eta = U_\eta(V) = V e^{\eta \phi} = \hat{V} e^{(\frac{3q}{c} + \eta)\phi}. \tag{0.8}$$

Убедитесь, что при этом заряд поля изменится как

$$q' = q + \frac{c}{3}\eta. \tag{0.9}$$

Покажите также, что если в операторном разложении V с $G^{\pm}$ были целые степени z^n, то в операторном разложении V_η с $G^{\pm}$ будут степени $z^{n \pm \eta}$. Дополнительная степень возникает из-за слияния $\exp(\eta\phi)$ с $\exp(\pm\frac{3}{c}\phi)$.

Считая, что конформная размерность поля V равна Δ, найдите конформную размерность поля V_η. Для этого используйте то, что тензор энергии-импульса распадается на две независимые части

$$T(z) = \widetilde{T}(z) + \frac{3}{2c}(\partial\phi(z))^2. \tag{0.10}$$

Используя это, выразите сначала размерность поля $\hat{V}$ через Δ и q, c. Затем найдите размерность поля V_η как сумму вклада двух составляющих. Покажите, что заряд, конформная размерность и монодромия поля V_η меняется в соответствии с формулами (0.5).

Задача 2. $\mathcal{N}=2$ **для материи в случае** $d=10$**.** Рассмотрим материальный сектор теории струн в 10 измерениях. В нем имеется 20 полей $X^\mu(z)$, $\psi^\mu(z)$, где $\mu=0,1,\ldots,9$. Они имеют следующие операторные разложения

$$X^\mu(z)X^\nu(0) = -\eta^{\mu\nu}\ln z + \text{рег.},$$
$$\psi^\mu(z)\psi^\nu(0) = \frac{\eta^{\mu\nu}}{z} + \text{рег.}. \tag{0.11}$$

Все остальные операторные разложения регулярны. Напомним, что метрика $\eta^{\mu\nu}$ имеет сигнатуру $\eta^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-,+,\ldots,+)$.

(а). Выберем повернутый базис в пространстве материальных полей

$$\psi_0^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\psi^0+\psi^1), \qquad \psi_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2k}\pm i\psi^{2k+1}),$$
$$X_0^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm X^0+X^1), \qquad X_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^{2k}\pm iX^{2k+1}). \tag{0.12}$$

Покажите, что в этом базисе верны следующие операторные разложения:

$$\psi_a^+(z)\psi_b^-(0) = \frac{\delta_{ab}}{z} + \text{рег.},$$
$$\partial X_a^+(z)\partial X_b^-(0) = -\frac{\delta_{ab}}{z^2} + \text{рег.}. \tag{0.13}$$

(б). Суперток в этой теории имеет вид:

$$G^m = i\psi^\mu\partial X_\mu = i\psi_a^+\partial X_a^- + i\psi_a^-\partial X_a^+. \tag{0.14}$$

Разделим полный суперток на две составляющих

$$G^m = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_+^m + G_-^m), \quad \text{где} \quad G_+^m = i\sqrt{2}\psi_a^+\partial X_a^-, \quad G_-^m = i\sqrt{2}\psi_a^-\partial X_a^+. \tag{0.15}$$

Покажите, что $G_\pm^m(z)$ и $T_m(z) = -\frac{1}{2}\partial X^\mu\partial X_\mu - \frac{1}{2}\psi^\mu\partial\psi_\mu$ удовлетворяют соотношениям $\mathcal{N}=2$ суперконформной алгебры, и найдите выражение для тока $J^m(z)$ из этой алгебры.

(в). Бозонизуем фермионы $\psi_a^\pm$ также как это было сделано в Листке 5:

$$\psi_a^\pm = e^{\pm iH_a}, \quad \text{где} \quad H_a(z)H_b(0) = -\delta_{ab}\ln z + \text{рег.} \tag{0.16}$$

Найдите выражение для тока $J^m(z)$ через $H_a(z)$.

Задача 3. $\mathcal{N}=2$ **для духов.** Система духов состоит из четырех полей — двух бозонов $\beta(z)$, $\gamma(z)$ и двух фермионов $b(z), c(z)$. Операторные разложения

$$\beta(z)\gamma(w) = -\frac{1}{z-w} + \text{рег.}, \qquad b(z)c(w) = \frac{1}{z-w} + \text{рег.}. \tag{0.17}$$

Все остальные операторные разложения регулярны. Тензор энергии импульса и суперток для духов

$$T^{gh} = -\partial bc - 2b\partial c - \frac{1}{2}\partial\beta\gamma - \frac{3}{2}\beta\partial\gamma,$$
$$G^{gh} = \partial\beta c + \frac{3}{2}\beta\partial c - 2b\gamma. \tag{0.18}$$

(а). Разделим суперток на две составляющих

$$G^{gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}(G_+^{gh} + G_-^{gh}), \quad \text{где} \quad G_+^{gh} = \sqrt{2}\partial\beta c + \frac{3}{\sqrt{2}}\beta\partial c, \quad G_-^{gh} = -2\sqrt{2}b\gamma. \tag{0.19}$$

Покажите, что токи $G_\pm^{gh}$ удовлетворяют соотношениям $\mathcal{N}=2$ суперконформной алгебры. Найдите также ток $J^{gh}(z)$ из этой алгебры.

(б). Приведем формулы для бозонизации духов

$$\begin{aligned} &\beta = e^{-\phi+\chi}\partial\chi, \quad \gamma = e^{\phi-\chi}, \quad \text{где} \quad \phi(z)\phi(0) = -\ln z + \text{рег.}, \quad \chi(z)\chi(0) = \ln z + \text{рег.}, \\ &c = e^{\sigma}, \quad b = e^{-\sigma}, \quad \text{где} \quad \sigma(z)\sigma(0) = \ln z + \text{рег.}. \end{aligned} \tag{0.20}$$

Найдите как ток $J^{gh}(z)$ выражается через бозоны $\chi(z), \phi(z), \sigma(z)$.

Задача 4. Построение пространственно-временного суперзаряда с помощью тока J
Построим следующее поле

$$Q(z) = e^{-\frac{1}{2}H(z)}, \tag{0.21}$$

где $\partial H = J = J^{gh} + J^m$.

(а). Используя, бозонизацию духов и материи, а также выражение J^m, J^{gh} через эти бозоны, покажите, что

$$Q(z) = \exp(-\frac{3}{2}\phi + \sigma - \frac{i}{2}\sum_k H_k) = c\, e^{-3/2\phi} S_\alpha, \tag{0.22}$$

где $S_\alpha = \exp(-\frac{i}{2}\sum_k H_k)$. Найдите его конформную размерность. Для этого сначала покажите, что

$$\Delta(e^{l\phi}) = -\frac{1}{2}l^2 - l. \tag{0.23}$$

Для этого используйте выражение для тензора энергии духов через бозоны ϕ, χ, написанные в Задаче 4 Листка 5.

(б). BRST-заряд в теории струн определяется как

$$\begin{aligned} &Q_B = \int dz\, j_B(z), \\ &j_B = cT^m + \gamma G^m + \frac{1}{2}\left(cT^{gh} + \gamma G^{gh}\right) = cT^m + \gamma G^m + bc\partial c - \frac{1}{2}c\gamma\partial\beta - \frac{3}{2}c\beta\partial\gamma - b\gamma^2. \end{aligned} \tag{0.24}$$

Последние равенство верно с точностью до полной производной. Напомним, что в теории струн физические поля должны быть BRST-замкнутыми, т.е. $[Q, V(z)] = 0$.

Покажите, что поле $Q(z)$ является BRST-замкнутым. Для этого удобно сначала бозонизовать β, γ в определении $j_B(z)$. В итоге вы должны получить

$$j_B = cT^m + e^{\phi-\chi}G^m + bc\partial c + c\left(-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \partial^2\phi + \frac{1}{2}\partial^2\chi\right) - be^{2\phi-2\chi}. \tag{0.25}$$

(в). Заменим в поле $Q(z)$ дух $c(z)$ в формуле (0.22) на интегрирование по z:

$$Q = \int \frac{dz}{2\pi i} e^{-3/2\phi} S_\alpha = \int \frac{dz}{2\pi i} j_{-1/2}(z), \tag{0.26}$$

где мы для удобства ввели обозначение $j_{-1/2}(z) = e^{-3/2\phi}S_\alpha$. Покажите, что этот оператор антикоммутирует с BRST-зарядом. Для этого достаточно показать, что коэффициент при вычете в операторном разложении $j_B(z)$ с $j_{-1/2}(z)$ является полной производной.

Задача 5. GSO-проекция и пространственно-временная суперсимметрия. В первой задаче, мы показали, что в $\mathcal{N} = 2$ суперконформной алгебре имеется автоморфизм U_η. Заметим, что при $\eta = -\frac{1}{2}$, он переводит эту алгебру из NS-сектора в R-сектор и обратно. Соответственно он переводит состояния, являющиеся фермионами и бозонами в пространстве-времени, в друг друга. Также мы показали в этой задаче, что этот автоморфизм может быть осуществлен с помощью действия экспоненциального оператора от $U(1)$ тока. Заметим, что оператор $Q(z)$ из предыдущей задачи как раз и является этой экспонентой. (Имеется некоторая тонкость связанная с занулением центрального заряда $c = c_m + c_{gh} = 15 - 15 = 0$, о которой рассказано в лекциях)

Все это является указанием на то, что Q является оператором пространственно-временной суперсимметрии. Хотелось бы явно проверить, что он удовлетворяет алгебре суперпуанкаре и найти его действие на физические состояния, но мы сделаем это в следующем листке. А в данной задаче мы сделаем еще одну проверку того, что оператор Q является оператором пространственно-временной суперсимметрии.

Вспомним, что при нахождении спектра струны требуется наложить дополнительное условие GSO-проекции на физические состояния. Только после наложения этого условия достигается пространственно-временная суперсимметрия. Поэтому наш оператор Q не может действовать на все состояния теории суперструн, так как иначе струна была бы суперсимметричная до GSO-проекции. Соответственно Q должен действовать только на состояния, которые удовлетворяют GSO-проекции. В данной задаче мы действительно убедимся, что это так.

(a). Рассмотрим произвольный вертексный оператор физического состояния $V(z)$. Бозонизуем в нем все духи и фермионы $\psi(z)$. После этого он примет вид

$$V(z) = (\dots) \exp\left[l\phi + m\sigma + \sum_k i s_k H_k + r\chi + ip^\mu X_\mu \right], \tag{0.27}$$

где мы опустили предэкспоненту, которая является полиномом от производных всех этих бозонных полей. Напомним, что в R-секторе $l, r, s_k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, а в NS-секторе $l, r, s_k \in \mathbb{Z}$. В обоих секторах $m \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим действие оператора Q определенного в (0.26) на это поле. При обходе тока $j_{-1/2}$ вокруг $V(z)$ может возникнуть фаза. Покажите, что фаза равна:

$$2\pi i \left(\frac{3l}{2} - m - \frac{1}{2}\sum s_k\right) \mod 2\pi i. \tag{0.28}$$

Для того, чтобы ее найти, нужно понять какие степени могут возникать в операторном разложении $j_{-1/2}(z)$ с $V(w)$. Покажите, что в операторном разложении $j_{-1/2}(z)$ с предэкспонентой возникают только целые степени $z - w$, которые соответственно не дают вклада в фазу (0.28). Найдите какие степени могут возникать при разложении $j_{-1/2}(z)$ с экспонентой. И из них найдите фазу.

Рассмотрим действие Q на $V(w)$:

$$[Q, V(w)] = \int_{|z-w|=R} \frac{dz}{2\pi i} j_{-1/2}(z) V(w). \tag{0.29}$$

Заметим, что для того, чтобы этот интеграл был хорошо определен, не должно возникать фазы при обходе по контуру интегрирования (или, что то же самое, подынтегральное выражения должно содержать только целые степени $z-w$). Соответственно для того, чтобы действие оператора Q на $V(z)$ было определенно, коэффициенты в экспоненте $V(z)$ должны удовлетворять

$$\frac{3l}{2} - m - \frac{1}{2}\sum s_k \in \mathbb{Z}. \tag{0.30}$$

(б). Напомним, что по определению GSO-проекция налагает следующие условие на состояния

$$(-1)^F V(z) = V(z), \tag{0.31}$$

где $F = F_{gh} + F_m$. В духовом секторе

$$F_{gh} = -\partial\phi. \tag{0.32}$$

В материальном

$$F_m = \int dz \sum_k \Sigma_{2k,2k+1}(z) = \int dz \sum_k :\psi_{2k}\psi_{2k+1}:, \tag{0.33}$$

здесь $\Sigma_{\mu\nu}(z)$ — ток соответствующий повороту Лоренца. Найдите действия оператора F на вертекс $V(z)$ и условия, которые налагает GSO-проекция на коэффициенты l, s_k. Покажите, что условие GSO-проекции эквивалентно (0.30).