Листок 4. Теория Струн

(Сканы/фото решений данного листка принимаются
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

Задача 1. Суперконформная алгебра. Рассмотрите алгебру Ли с генераторами L_n, G_r, где n — целые числа, а r — полуцелые числа. Генераторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n,0},\\ [G_r, G_s]_+ &= 2L_{r+s} + B(r)\delta_{r+s,0},\\ [L_m, G_r] &= \frac{m-2r}{2}G_{m+r}.\end{aligned} \tag{0.1}$$

Используя тождества Якоби, покажите, что $A(m) = c(m^3 - m)$ и $B(r) = c(4r^2 - 1)$, где c некоторая константа. Получите также первый и третий коммутаторы из второго.

Замечание: В Задачах 2 и 3 мы будем пользоваться следующей нормировкой для суперконформной алгебры:

$$\begin{aligned}[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0},\\ [G_r, G_s]_+ &= 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2 - 1)\delta_{r+s,0}, ,\\ [L_m, G_r] &= \frac{m-2r}{2}G_{m+r}.\end{aligned} \tag{0.2}$$

Задача 2. Нуль-вектора суперконформной алгебры в NS-секторе. Модуль Верма в NS-секторе для суперконформной алгебры определяется своим вакуумом $|\Delta\rangle$, который удовлетворяет

$$\begin{aligned}&L_n|\Delta\rangle = G_r|\Delta\rangle = 0, \qquad \text{для } n > 0 \text{ и } r > 0,\\ &L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle,\end{aligned} \tag{0.3}$$

где n — целое, а r — полуцелое число. По определению модуль Верма — это все вектора порожденные действием отрицательных мод G_{-r} и L_{-n} на $|\Delta\rangle$ без каких-либо дополнительных условий (кроме коммутационных соотношений суперконформной алгебры). При некоторых условиях в модуле Верма возникают нуль-вектора, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}&L_n|\text{null}\rangle = G_r|\text{null}\rangle = 0, \qquad \text{для } n > 0 \text{ и } r > 0,\\ &L_0|\text{null}\rangle = (\Delta + N)|\text{null}\rangle\end{aligned} \tag{0.4}$$

для некоторого числа N, которое называется уровнем нуль-вектора.

(а). Покажите, что нуль-вектор, а также все его потомки (то есть вектора, порожденные действием отрицательных мод G_{-r} и L_{-n} на $|\text{null}\rangle$) ортогональны любому вектору из модуля Верма. (По определению $(|0\rangle)^+ = \langle 0|$, $(L_n)^+ = L_{-n}$, $(G_r)^+ = G_{-r}$, $\langle 0|0\rangle = 1$).

(б). Рассмотрите произвольные вектора общего вида на нескольких первых уровнях:

$$\begin{aligned}&\text{Уровень } 1/2: && G_{-1/2}|\Delta\rangle,\\ &\text{Уровень } 1: && L_{-1}|\Delta\rangle,\\ &\text{Уровень } 3/2: && (G_{-3/2} + a\,G_{-1/2}L_{-1})|\Delta\rangle,\\ &\text{Уровень } 2: && (L_{-2} + b\,G_{-1/2}G_{-3/2} + d\,L_{-1}^2)|\Delta\rangle.\end{aligned} \tag{0.5}$$

Найдите условия на c, Δ и коэффиценты a, b, d, при которых эти вектора становятся нуль-векторами. (Условия разные для каждого конкретного вектора).

Задача 3. Нуль-вектора суперконформной алгебры в R-секторе. Модуль Верма в R-секторе для суперконформной алгебры определяется своим вакуумом $|\Delta\rangle$, который удовлетворяет

$$\begin{aligned} &L_n|\Delta\rangle = G_n|\Delta\rangle = 0, \qquad \text{для } n > 0, \\ &L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle, \end{aligned} \tag{0.6}$$

где n — целое. По определению модуль Верма — это все вектора порожденные действием отрицательных мод G_{-n} и L_{-n}, а также G_0 на $|\Delta\rangle$ без каких либо дополнительных условий (кроме коммутацинноных соотношений суперконформной алгебры). При некоторых условиях в модуле Верма возникают нуль-вектора которые также удовлеторяют соотношениям

$$\begin{aligned} &L_n|\text{null}\rangle = G_r|\text{null}\rangle = 0, \qquad \text{для } n > 0 \text{ и } r > 0, \\ &L_0|\text{null}\rangle = (\Delta + N)|\text{null}\rangle \end{aligned} \tag{0.7}$$

для некоторого числа N, которое называется уровнем нуль-вектора. Рассмотрите вектор на первом уровне вида

$$(G_{-1}G_0 + a\,L_{-1})|\Delta\rangle. \tag{0.8}$$

(а). Найдите условия на c, Δ и коэффициент a, при которых этот вектор становится нуль-вектором.

(б). Кроме указанного вектора, также на первом уровне имеется вектор:

$$(G_{-1} + b\,G_0 L_{-1})|\Delta\rangle. \tag{0.9}$$

Однако, его можно рассматривать как потомок другого вакуумного вектора $|\widetilde{\Delta}\rangle = G_0|\Delta\rangle$. Далее, если принять дополнительное условие, что потомки имеют одну четность (разрешить нарождать их только действием четного числа мод G), то изначальный модуль Верма расцепится на две независимые составляющие растущие из $|\Delta\rangle$ и $|\widetilde{\Delta}\rangle$ соответственно. Убедитесь в том, что эти две составляющие изоморфны.

(в). Напишите общий вид вектора на втором уровне и найдите каким условиям он и параметры c, Δ должны удовлетворять для того, чтобы он был нуль-вектором.

Задача 4. Спиноры в 10-ти измерениях. Рассмотрим алгебру Клиффорда в 10-ти измерениях

$$[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}, \tag{0.10}$$

где $\mu, \nu = 0, \ldots, 9$.

(а). Ее представления можно построить следующим способом. Введем операторы

$$\Gamma^0_\pm = \frac{1}{2}(\pm\Gamma^0 + \Gamma^1), \tag{0.11}$$

$$\Gamma^a_\pm = \frac{1}{2}(\Gamma^{2a} \pm i\Gamma^{2a+1}), \quad a = 1, \ldots 4. \tag{0.12}$$

Покажите, что эти операторы удовлетворяют

$$\begin{aligned} &[\Gamma^a_+, \Gamma^b_-]_+ = \delta_{a,b}, \\ &[\Gamma^a_+, \Gamma^b_+]_+ = [\Gamma^a_-, \Gamma^b_-]_+ = 0. \end{aligned} \tag{0.13}$$

Последнее соотношение показывает, что они являются пятью парами фермионых операторов рождения-уничтожения. Соответственно мы можем построить представление алгебры Клиффорда (0.10) введя вектор $|0\rangle$ который удовлетворяет $\Gamma^a_-|0\rangle = 0$. Тогда остальные вектора представления порождаются операторами Γ^a_+. Найдите размерность этого представления.

(б). Введем оператор

$$\Gamma^{11} = \prod_{\mu=0}^{10} \Gamma^\mu. \tag{0.14}$$

Покажите, что он антикоммутирует со всеми Γ^μ. Также покажите, что он разбивает представления из пункта **(б)** на два независимых подпредставления относительно группы Лоренца (генераторы группы Лоренца действуют на спиноры как $\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$). Найдите размерность этих представлений. Покажите, что в базисе $\Gamma^a_\pm$ он имеет вид

$$\Gamma^{11} = 2^5 \prod_{a=0}^{4} S_a, \tag{0.15}$$

где $S_a = \Gamma^a_+\Gamma^a_- - \frac{1}{2}$ — операторы числа заполнения.

(в). Тот факт, что разные операторы рождения-уничтожения в (0.13) антикоммутируют друг с другом позволяет построить явное представление гамма-матриц. Для этого сначала ограничимся случаем, где имеется только одна пара операторов рождения-уничтожения $\Gamma^0_\pm$. Ее представление состоит из вакуумного вектора $|-\frac{1}{2}\rangle$ и одного возбуждения $|\frac{1}{2}\rangle = \Gamma^0_+|-\frac{1}{2}\rangle$. Из формулы (0.11) можно легко найти вид гамма-матриц в этом базисе

$$\Gamma^0_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^1_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.16}$$

Это дает явный вид гамма-матриц в двух измерениях. Так как в 10 измерениях у нас 5 независимых копий операторов рождения-уничтожения, то ее представление можно построить как тензорное произведение двумерных представлений.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0 &= \Gamma^0_{2d} \otimes \sigma \otimes \sigma \otimes \sigma \otimes \sigma, \\
\Gamma^1 &= \Gamma^1_{2d} \otimes \sigma \otimes \sigma \otimes \sigma \otimes \sigma, \\
\Gamma^2 &= 1 \otimes \widetilde{\Gamma}^0_{2d} \otimes \sigma \otimes \sigma \otimes \sigma, \\
\Gamma^3 &= 1 \otimes \widetilde{\Gamma}^1_{2d} \otimes \sigma \otimes \sigma \otimes \sigma, \\
\Gamma^4 &= 1 \otimes 1 \otimes \widetilde{\Gamma}^0_{2d} \otimes \sigma \otimes \sigma, \\
\Gamma^5 &= 1 \otimes 1 \otimes \widetilde{\Gamma}^1_{2d} \otimes \sigma \otimes \sigma, \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{0.17}$$

где $\widetilde{\Gamma}^s_{2d}$ — это гамма-матрицы, получаемые также как (0.16), но с использованием формулы (0.12), а не (0.11). Члены с $\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ возникают из-за того, что разные операторы рождения-уничтожения антикоммутируют, а не коммутируют. Найдите вид матриц $\widetilde{\Gamma}^s_{2d}$ и убедитесь, что эти формулы действительно дают представление гамма-матриц. Напишите также как выглядит матрица Γ^{11} как тензорное произведение соответствующих двумерных.

(г). При изучения спектра двумерной струны нам понадобится знать, как тензорное произведение двух вейлевских спиноров раскладывается по неприводимым представлениям группы Лоренца. Рассмотрим, например, два правых ($\Gamma^{11}|\mathbf{s}\rangle = |\mathbf{s}\rangle$) вейлевских спинора $|\mathbf{s_1}\rangle$ и $|\mathbf{s_2}\rangle$. Для того, чтобы получить на какие неприводимые представления разбивается их тензорное произведения нужно свернуть их с гамма-матрицами

$$\sum_{\mathbf{s_1},\mathbf{s_2}} (\Gamma^0\Gamma^\mu)_{\mathbf{s_1}\mathbf{s_2}} |\mathbf{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{s_2}\rangle, \qquad \sum_{\mathbf{s_1},\mathbf{s_2}} (\Gamma^0\Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\Gamma^{\mu_3]})_{\mathbf{s_1}\mathbf{s_2}} |\mathbf{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{s_2}\rangle,$$
$$\sum_{\mathbf{s_1},\mathbf{s_2}} (\Gamma^0\Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\Gamma^{\mu_3}\Gamma^{\mu_4}\Gamma^{\mu_5]})_{\mathbf{s_1}\mathbf{s_2}} |\mathbf{s_1}\rangle \otimes |\mathbf{s_2}\rangle, \tag{0.18}$$

где $(A)_{\mathbf{s_1},\mathbf{s_2}} = \langle\mathbf{s_1}|A|\mathbf{s_2}\rangle$, квадратные скобки обозначают антисиммитризацию по индексам стоящим в них. Эти формулы получаются аналогично соответствующей процедуре в четырехмерной теории поля, где чтобы из двух спиноров η, χ получить скаляр, вектор и т.д. нужно составлять комбинации $\eta^+\gamma^0\chi,\ \eta^+\gamma^0\gamma^\mu\chi, \ldots$. Мы написали только выражения с четным числом гамма-матриц, так как спиноры имеют одну киральность и аналогичные выражения с нечетным числом гамма-матриц равны нулю.

Покажите, что соответствующие выражения с большим числом гамма-матриц линейно выражаются через указанные выше (*Подсказка:* подействуйте на них Γ^{11}). Покажите, что последний член в (0.18) удовлетворяет условию самодуальности. Убедитесь, что в (0.18) написаны три неприводимых представления группы Лоренца. Найдите их размерности и убедитесь, что их сумма равна квадрату размерности представления вейлевского спинора.

Проделайте аналогичную процедуру для тензорного произведения левого и правого спиноров, а также левого и левого.

Задача 5. Спектр открытой суперструны. NS-сектор. Найдите физические состояния на первом и втором уровне для открытой суперструны в NS-секторе. Общий вид состояний на этих уровнях записывается как

$$|0,k\rangle_{\mathrm{NS}}, \quad a_\mu\psi^\mu_{-1/2}|0,k\rangle_{\mathrm{NS}}. \tag{0.19}$$

(а). Найдите уравнения, которые накладываются на эти состояния условием физичности

$$L_n|\mathrm{phys}\rangle = G_r|\mathrm{phys}\rangle = 0, \quad \text{для } n \geq 0 \text{ и } r \geq 0, \tag{0.20}$$

где

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} : a_{m-n}a_n : -\frac{1}{2}\delta_{n,0}, \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$G_r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\psi_{r-m}, \qquad r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \tag{0.21}$$

где индекс μ опущен и по нему предполагается суммирование. a^μ_n, ψ^μ_r генераторы алгебр Гейзенберга и свободных фермионов соотетствено:

$$[a^\mu_n, a^\nu_m] = n\delta_{m,-n}\nu^{\mu\nu},$$
$$[\psi^\mu_r, \psi^\nu_q]_+ = \delta_{r,-q}\nu^{\mu\nu}, \tag{0.22}$$

также $a^\mu_0 = \hat{p}_\mu$ и все остальные коммутаторы равны нулю.

Замечание: при определении оператора L_0 есть некоторый произвол в выборе постоянного члена. Например, мы могли бы выбрать его равным нулю, не $-1/2$. При этом условие физичности бы изменилось на $L_0|\text{phys}\rangle = \frac{1}{2}|\text{phys}\rangle$. Однако, только один выбор этой константы позволяет получить коммутационные соотношения вида (0.2).

(б). Рассмотрите нуль-состояние вида

$$|\text{null}\rangle = G_{-1/2}|0,k\rangle_{\text{NS}}. \tag{0.23}$$

Покажите, что это состояние действительно удовлетворяет условию физичности из предыдущего пункта. Запишите калибровочные преобразования, которые существуют из-за такого нуль-состояния.

(в). Используя результаты предыдущих двух пунктов, напишите условия на физические состояния. Разрешите их в системе покоя и в произвольной системе отсчета.

(г). Введем оператор $(-1)^F$ как

$$\begin{aligned}
[(-1)^F, a_n^\mu] &= 0,\\
[(-1)^F, \psi_r^\mu]_+ &= 0,\\
(-1)^F|0,k\rangle_{\text{NS}} &= -|0,k\rangle_{\text{NS}}.
\end{aligned} \tag{0.24}$$

Найдите собственные значения физических состояния из пункта **(в)** относительно оператора $(-1)^F$.

Задача 6. Спектр открытой суперструны. R-сектор. Найдите физические состояния на первом для открытой суперструны в R-секторе. Общий вид состояний на этих уровне это

$$|\mathbf{s},k\rangle_{\text{R}}, \tag{0.25}$$

где s — дираковский спинор в 10 измерениях. Нулевые моды ψ_0^μ действуют на эти состояния как гамма-матрицы

$$\psi_0^\mu|\mathbf{s},k\rangle_{\text{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma^\mu_{\mathbf{ss'}}|\mathbf{s}',k\rangle_{\text{R}}, \tag{0.26}$$

где по $\mathbf{s}'$ предполагается суммирование, а $\Gamma^\mu_{\mathbf{ss'}}$ — матричные элементы гамма-матрицы.

(а). Найдите уравнения, которые накладываются на эти состояния условием физичности

$$L_n|\text{phys}\rangle = G_n|\text{phys}\rangle = 0, \quad \text{для } n \geq 0 \ , \tag{0.27}$$

где

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} :a_{m-n}a_n:, \quad n \in \mathbb{Z},\\
G_n &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\psi_{n-m}, \qquad\quad n \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{0.28}$$

где индекс μ опущен и по нему предполагается суммирование. Заметьте, что в отличии от NS-сектора, здесь отсутствует постоянный член в L_0, а также теперь индекс тока G_n (как ψ_n) пробегает целые значения. a_n^μ, ψ_r^μ генераторы алгебр Гейзенберга и свободных фермионов соотетствено

$$\begin{aligned}
[a_n^\mu, a_m^\nu] &= n\delta_{m,-n}\nu^{\mu\nu},\\
[\psi_n^\mu, \psi_m^\nu]_+ &= \delta_{n,-m}\nu^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{0.29}$$

также $a_0^\mu = \hat{p}_\mu$ и все остальные коммутаторы равны нулю.

(б). Убедитесь, что в данном случае нет нуль-векторов.

(в). Используя результаты предыдущих двух пунктов, напишите условия на физические состояния. Разрешите их в системе покоя и в произвольной системе отсчета. Убедить, что в данном случае мы получили пространственно-временной фермион, который удовлетворяет уравнению Дирака.

(г). Покажите, что эти состояния разбиваются под действием оператора Γ^{11} на две независимых группы относительно преобразования Лоренца.

Задача 7. Спектр замкнутой суперструны. В замкнутой суперструне имеются две независимых суперконфорнмых алгебры (левая и правая соответственно) и 4 сектора (R-R, NS-R, R-NS, NS-NS). Условия на физические состояния пишутся также, как в предыдущих задачах для каждой из суперконформных алгебр в соответствующем секторе. Например, в R-NS на безмассовом уровне имеется состояние вида

$$A_{\mathbf{s},\mu}\, \overline{\psi}^{\mu}_{-1/2}|\mathbf{s}, k\rangle_{\mathrm{R}} \otimes |0, k\rangle_{\mathrm{NS}}. \tag{0.30}$$

Здесь и в дальнейшем черта над оператором будет обозначать, что он относиться к правой алгебре и он действует только на правую часть в тензорном произведении. Соответственно, операторы без черты обозначают левую часть. Условия физичности примут вид

$$\begin{aligned} L_n|\mathrm{phys}\rangle = G_n|\mathrm{phys}\rangle = 0, &\quad \text{для } n \geq 0\ , \\ \overline{L}_n|\mathrm{phys}\rangle = \overline{G}_r|\mathrm{phys}\rangle = 0, &\quad \text{для } n \geq 0 \text{ и } r \geq 0. \end{aligned} \tag{0.31}$$

Также имеется один нуль-вектор

$$\overline{G}_{-1/2}|\mathbf{s}, k\rangle_{\mathrm{R}} \otimes |0, k\rangle_{\mathrm{NS}}. \tag{0.32}$$

(а). Общий вид состояний на безмассовом уровне в R-R, NS-R, R-NS, NS-NS секторах соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \text{R-R}: &\qquad A_{\mathbf{s_1},\mathbf{s_2}}\, |\mathbf{s_1}, k\rangle_{\mathrm{R}} \otimes |\mathbf{s_2}, k\rangle_{\mathrm{R}}, \\ \text{NS-R}: &\qquad B_{\mu,\mathbf{s}}\, \psi^{\mu}_{-1/2}|0, k\rangle_{\mathrm{NS}} \otimes |\mathbf{s}, k\rangle_{\mathrm{R}}, \\ \text{R-NS}: &\qquad C_{\mathbf{s},\mu}\, \overline{\psi}^{\mu}_{-1/2}|\mathbf{s}, k\rangle_{\mathrm{R}} \otimes |0, k\rangle_{\mathrm{NS}}, \\ \text{NS-NS}: &\qquad D_{\mu\nu}\, \psi^{\mu}_{-1/2}\overline{\psi}^{\nu}_{-1/2}|0, k\rangle_{\mathrm{NS}} \otimes |0, k\rangle_{\mathrm{NS}}. \end{aligned} \tag{0.33}$$

Найдите условия, которые накладываются на эти состояния условием физичности и нуль-состояниями. Разрешите их в системе покоя и в произвольной системе отсчета. Разбейте, также получившиеся состояния по неприводимым представлениям группы Лоренца.