Листок 2. Теория Струн

(Сканы/фото решений данного листка принимаются
на e-mail: hetzif@yandex.ru)

Задача 1. (OPE для свободного скалярного поля)[1]: Функция Грина для открытой струны в подходе Полякова [1] есть сумма по всем поверхностям проходящим через заданный набор точек $\{\boldsymbol{x}_i\}$:

$$G(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N) = \Big\langle \prod_i h^{1/2}(\xi_i)\delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}(\xi_i))d^2\xi_i \Big\rangle, \tag{0.1}$$

что в импульсном представлении есть

$$G(\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_N) = \Big\langle \prod_i h^{1/2}(\xi_i)e^{i\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{x}(\xi_i)}d^2\xi_i \Big\rangle \tag{0.2}$$

и после вычисления равняется

$$G(\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_N) = \int \prod_j d^2\xi_j \prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j} F(\boldsymbol{p}_1^2, ..., \boldsymbol{p}_N^2; \xi_1, ..., \xi_N), \tag{0.3}$$

где F дается интегралом Лиувилля по полю φ. Амплитуда рассеяния на массовой поверхности связана с вычетами функции F в полюсах $p_j^2 = -m^2$ (см. формулу ЛСЦ (LSZ) [2]):

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_N) = \int \prod_j d^2\xi_j \prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j} \phi(\xi_1, ..., \xi_N), \tag{0.4}$$

где $\phi(\xi_1, ..., \xi_N) = \operatorname*{res}_{p_j^2=-m^2} F(\boldsymbol{p}_1^2, ..., \boldsymbol{p}_N^2; \xi_1, ..., \xi_N)$. В данной задаче, в одном из пунктов нужно будет показать, что корреляционая функция нормально упорядоченых экспонент — вертексных операторов $V_{\boldsymbol{p}}(\xi) =: e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(\xi)}:$ от свободного скалярного поля $\boldsymbol{x}(\xi)$, воспроизводит фактор $\prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j}$.

Рассмотрим двумерную евклидову теорию свободного скалярного поля $x^\mu(z, \bar{z})$, где $\mu = 0, ..., D-1$, и мы уже перешли к комплексным координатам $z = x^1 + ix^2$ и $\bar{z} = x^1 - ix^2$, в дальнейшем мы для краткости будем писать скалярное поле как $x^\mu(z)$ [3]. Пропагатор такого поля есть

$$\langle x^\mu(z_1)x^\nu(z_2)\rangle = -\eta^{\mu\nu}\log|z_{12}|^2, \tag{0.5}$$

где $z_{12} = z_1 - z_2$. Для начала определим понятие нормального упорядочения с помощью рекурсионного уравнения

$$: x^{\mu_1}(z_1)...x^{\mu_n}(z_n) : x^\mu(z) =: x^{\mu_1}(z_1)...x^{\mu_n}(z_n)x^\mu(z) : + \sum_{i=1}^n : x^{\mu_1}(z_1)\overset{\hat{i}}{...}x^{\mu_n}(z_n) : \langle x^{\mu_i}(z_i)x^\mu(z)\rangle, \tag{0.6}$$

здесь индекс $\hat{i}$ над многоточием означает, что из нормального произведения исключен i-тый множитель. Также мы подразумеваем, что $: x^\mu(z) := x^\mu(z)$.

(a). Покажите, что нормальное упорядочение может быть записанно как

$$: \mathcal{F} := \exp\big(\frac{1}{2}\int d^2z_1 d^2z_2 \log|z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta x^\mu(z_1)}\frac{\delta}{\delta x_\mu(z_2)}\big)\mathcal{F}, \tag{0.7}$$

[1] OPE — Operator Product Expansion или Операторное разложение.

где $\mathcal{F}$ любой функционал от x.

(б). Выведите формулу

$$
\begin{aligned}
&: x^{\mu_1}(z_1)...x^{\mu_m}(z_m) :: x^{\nu_1}(w_1)...x^{\nu_n}(w_n) := \\
&= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant m \\ 1\leqslant j_1<...<j_k\leqslant n}} : \overbrace{x^{\mu_1}(z_1)...x^{\mu_m}(z_m)}^{\hat{i}_1...\hat{i}_k} :: \overbrace{x^{\nu_1}(w_1)...x^{\nu_n}(w_n)}^{\hat{j}_1...\hat{j}_k} : \prod_{l=1}^{k} \langle x^{\mu_{i_l}}(z_{i_l}) x^{\nu_{j_l}}(w_{j_l})\rangle, \quad (0.8)
\end{aligned}
$$

или, что в краткой форме есть

$$
: \mathcal{F} :: \mathcal{G} := \exp\big(- \int d^2 z_1 d^2 z_2 \log|z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta x^{\mu}_{\mathcal{F}}(z_1)} \frac{\delta}{\delta x_{\mathcal{G}\mu}(z_2)}\big) : \mathcal{F}\mathcal{G} :, \tag{0.9}
$$

где одна функциональная производная действует только на $\mathcal{F}$, а другая только на $\mathcal{G}$.

(в). Используя пункт **(б)**, покажите, что

$$
: e^{i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}(z_1)} :: e^{i\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}(z_2)} := |z_{12}|^{2\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2} : e^{i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{x}(z_1)+i\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{x}(z_2)} : \tag{0.10}
$$

и далее, что

$$
\langle V_{\boldsymbol{p}_1}(z_1)....V_{\boldsymbol{p}_n}(z_n)\rangle = \prod_{i<j}^{n} |z_i - z_j|^{2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j}, \tag{0.11}
$$

где $V_{\boldsymbol{p}}(z) =: e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(z)} :$.

(г). Покажите, что операторное разложение (OPE) между голоморфной частью тензора энергии-импульса $T(z) = -\frac{1}{2} : \partial_z x^{\mu} \partial_z x_{\mu} :$ и вертексным оператором $V_{\boldsymbol{p}}(z)$ есть

$$
T(z)V_{\boldsymbol{p}}(u) = \frac{\Delta_{\boldsymbol{p}}}{(z-u)^2} + \frac{1}{z-u}\partial_z V_{\boldsymbol{p}}(z) + \mathrm{reg.}, \tag{0.12}
$$

где $\Delta_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2$, здесь $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$, а reg. — регулярные члены, которые не сингулярны в пределе $z \to u$.

Задача 2. Пусть для операторов симметрии $\hat{I}_i$ выполняется соотношение

$$
[\hat{I}_i, \hat{I}_j] = f_{ij}^k \hat{I}_k. \tag{0.13}
$$

Действие операторов симметрии на антидухи b_i и c^i равно

$$
\hat{I}_i b_j = f_{ij}^k b_k, \quad \hat{I}_i c^k = -f_{ij}^k c^j. \tag{0.14}
$$

Покажите, что для заряда

$$
Q = c^i \hat{I}_i - \frac{1}{2} f_{ij}^k c^i c^j b_k \tag{0.15}
$$

верно $Q^2 = 0$. Аникоммутатор антидухов равен $\{c^i, b_j\} = \delta^i_j$.

Задача 3. Рассмотрим заряд вида

$$
Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \big(L^x_{-n} + \frac{1}{2} L^g_{-n} - a\delta_{n,0}\big) c_n :, \tag{0.16}
$$

где генератор алгебры Вирасоро духов L_n^g дается формулой

$$L_n^g = \sum_m (m-n) c_{-m} b_{m+n}. \tag{0.17}$$

Покажите, что

$$Q^2 = \frac{1}{2} \sum ([L_n, L_m] - (n-m) L_{n+m}) c_n c_m, \tag{0.18}$$

где $L_n = L_n^x + L_n^g - a\delta_{n,0}$. Далее покажите, что если $D = 26$ и $a = 1$, то $Q^2 = 0$.

Задача 4. (BRST-квантование струны)
(а). Используя явные виды BRST и духового зарядов [2]

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \left(L_{-n}^x + \frac{1}{2} L_{-n}^g - \delta_{n,0}\right) c_n :, \tag{0.19}$$

$$U = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : c_{-n} b_n : - \frac{1}{2}, \tag{0.20}$$

покажите, что $[U, Q] = Q$ и $[Q, L_0^x + L_0^g] = 0$.

(б). Разобьем пространство состояний струны на подпространства $M(N^{gh}, N)$ с фиксированным уровнем N и духовым числом N^{gh}. В предыдущем пункте мы получили, что оператор Q действует как показано на рисунке:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & N^{gh} = -3/2 & & N^{gh} = -1/2 & & N^{gh} = 1/2 & & \\
 & & & & & & & & & \\
N = 0 & \ldots & \xrightarrow{Q} & M(-3/2,0)\ldots & \xrightarrow{Q} & M(-1/2,0) & \xrightarrow{Q} & M(1/2,0) & \xrightarrow{Q} & \ldots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
N = 1 & \ldots & \xrightarrow{Q} & M(-3/2,1)\ldots & \xrightarrow{Q} & M(-1/2,1) & \xrightarrow{Q} & M(1/2,1) & \xrightarrow{Q} & \ldots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & \ldots & & \ldots & & \ldots & &
\end{array}$$

Соответственно в каждом из пространств $M(N^{gh}, N)$ мы можем определить когомологии оператора Q как $\mathrm{H}(N^{gh}, N) = \mathrm{Ker}\, Q / \mathrm{Im}\, Q$.
Рассмотрите состояние общего вида в пространстве $M(-1/2, 1)$:

$$|k, \xi, \beta\rangle = \left(\xi_\mu a_{-1}^\mu + \beta b_{-1} c_0\right) |0, k_\mu\rangle \tag{0.21}$$

и найдите каким условиям должны удовлетворять k_μ, ξ_μ, β, чтобы $Q|k, \xi, \beta\rangle = 0$.

Далее, найдите все состояния в $M(-1/2, 1)$ являющиеся Q-точными, т.е. имеющими вид $|k, \xi, \beta\rangle = Q|v\rangle$, где v — какое-то состояние из $M(-3/2, 1)$.

(в). Проделайте тоже для состояния в пространстве $M(-1/2, 2)$. Общий вид вектора из этого пространства

$$|k, A, B, \xi, \beta, \gamma\rangle = (A_{\mu\nu} a_{-1}^\mu a_{-1}^\nu + B_\mu a_{-2}^\mu + \xi_\mu a_{-1}^\mu b_{-1} c_0 + \beta b_{-1} c_{-1} + \gamma b_{-2} c_0)|0, k_\mu\rangle \tag{0.22}$$

[2] b_0 будем считать оператором уничтожения, а c_0 – рождения. Соответственно $: b_0 c_0 := -c_0 b_0$ и $b_0|0, k_\mu\rangle = 0$

Задача 5. С учетом результата решения Задачи 4, покажите, что добавлением Q-точных членов Q-замкнутые состояния на 1-ом и 2-ом уровнях с духовым числом $-1/2$ приводятся к виду не содержащему слагаемых с духовыми операторами.

Список литературы

[1] Поляков А. М., *Калибровочные поля и струны*, РХД, страница 207.

[2] Упражнение 10: http://ium.mccme.ru/postscript/s14/belavin-Listok10.pdf

[3] Польчинский, Д. *Теория струн*, том 1, параграф 2, стр 31.