

Листок 6. Дифференцирование.

Пусть N, M – векторные пространства над \mathbb{R} . Отображение $L: N \mapsto M$ называется линейным, если $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x, y \in N$. Линейное отображение еще называют линейным оператором. Далее предполагаем, что N, M – нормированные пространства.

Задача 1. Пусть L – линейное отображение из N в M . Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- (a) L – непрерывно;
- (b) L – непрерывно в нуле;
- (c) существует число C такое, что $\|L(x)\| \leq C\|x\|$ для всех x .

Задача 2. Пусть $L(x) = x(0)$ – линейное отображение из $C[0, 1]$ в \mathbb{R} . Является ли оно непрерывным, если на $C[0, 1]$ задана норма а) $\|x\| = \max_{[0,1]} |x(t)|$, б) $\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$?

Задача 3.* Докажите, что нормированное пространство N конечномерно тогда и только тогда, когда всякое линейное отображения из N в \mathbb{R} непрерывно.

Положим

$$\|L\| = \sup_{x: \|x\| \leq 1} \|L(x)\|$$

Заметим, что согласно задаче 1 (c) это выражение конечно тогда и только тогда, когда L – непрерывный оператор (еще говорят, что L – ограниченный оператор)

Задача 4. Докажите, что $\|L\|$ – норма на линейном пространстве непрерывных линейных операторов.

Задача 5. Докажите, что $\|L_1 \circ L_2\| \leq \|L_1\| \|L_2\|$.

Задача 6. Покажите на примере, что \sup нельзя заменить на \max .

Задача 7. Пусть $L(x) = Ax: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, где A – матрица $n \times n$. Докажите, что $\|L\|$ равна $\sqrt{\lambda}$, где λ – наибольшее собственное значение матрицы AA^* .

Отображение $f: N \mapsto M$ называется дифференцируемым (по Фреше) в точке $a \in N$, если f определено в окрестности точки a и существует такой линейный непрерывный оператор $L_a: N \mapsto M$, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L_a(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Линейный оператор L называют дифференциалом отображения f в точке a и обозначают через $df(a, h)$.

Задача 8. Докажите, что следующие отображения дифференцируемы на своей области определения и найдите их дифференциалы:

- (a) $f(x) = L(x)$ – линейный непрерывный оператор;
- (b) $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$;
- (c) $f: M^n \mapsto M^n, f(x) = x^k$, где M^n – матрицы $n \times n$;
- (d) $f: M^n \mapsto M^n, f(x) = x^{-k}$;
- (e) $f: M^n \mapsto M^n, f(x) = e^x$;
- (f) $f: M^n \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \det x$;
- (g) $f: C[0, 1] \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 |x(t)|^2 dt$.

Предел

$$\partial_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

называют производной по вектору h . Если $\|h\| = 1$, то $\partial_h f(a)$ называют производной по направлению h . Если существует такой линейный непрерывный оператор $L_a: N \mapsto M$, что $\partial_h f(a) = L_a(h)$ для всякого $h \in N$, то говорят, что отображение $f: N \mapsto M$ дифференцируемо по Гато в точке $a \in N$.

Задача 9. Приведите пример функции $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, у которой для всякого h существует $\partial_h f(0)$, но функция f не дифференцируема по Гато в $x = 0$.

Задача 10. Докажите, что дифференцируемость по Фреше влечет дифференцируемость по Гато, но обратное неверно.

Задача 11. Пусть $f: N \mapsto M$ дифференцируема по Гаю в окрестности точки a и отображение $b \mapsto L_b$ непрерывно в точке a . Докажите, что f дифференцируема по Фреше в точке a .

Пусть $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a . Тогда $df(a, \cdot)$ – линейное отображение $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ и его можно записать в виде $df(a, h) = c_1 h_1 + \dots + c_n h_n$. Вектор (c_1, c_2, \dots, c_n) называется градиентом функции f в точке a и обозначается через $\nabla f(a)$ или $\text{grad} f(a)$.

Задача 12. Докажите, что

(а) $c_k = \partial_{e_k} f(a)$, где $e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (выражение $\partial_{e_k} f(a)$ обозначают через $\frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$ и называют частной производной по x_k);

(б) $\max_{\|h\|=1} \partial_h f(a) = \|\text{grad} f(a)\|$.

Задача 13. Пусть $f, g: N \mapsto M$ – дифференцируемые в точке a отображения и $h: M \mapsto K$ – дифференцируемо в точке $f(a)$. Докажите, что

(а) $d(f + g) = df + dg$;

(б) $d(fg) = f(a)dg + g(a)df$;

(с) если $g(a) \neq 0$, то $d(\frac{f}{g}) = \frac{g(a)df - f(a)dg}{g^2(a)}$;

(д) $dh \circ f = dh \circ df$.

Задача 14. Существует ли дифференцируемое отображение $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, отображающее ось абсцисс на график функции $y = |x|$?

Задача 15. Пусть $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ и $\gamma: [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^n$ – дифференцируемые отображения. Покажите, что

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df(\dot{\gamma}(t)) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_k} \dot{x}_k(t).$$

Задача 16. Опишите все дифференцируемые функции $f(x, y)$, удовлетворяющие уравнению $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Заметим, что dx_k (дифференциал функции $f(x) = x_k$) является линейной функцией на \mathbb{R}^n , причем всякая линейная функция L может быть записана в виде $L = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$. Если задано отображение $\omega: x \mapsto L_x$, сопоставляющее каждой точке открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ линейную функцию L_x , то говорят, что на U задана 1-форма ω или дифференциальная форма ω степени 1. Далее пишем $\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$. Типичный пример 1-формы – дифференциал функции f . Форму ω можно проинтегрировать по гладкому пути $\gamma: [0, 1] \mapsto U$ следующим образом:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 a_1(\gamma(t))\dot{x}_1(t) + \dots + a_n(\gamma(t))\dot{x}_n(t) dt.$$

Кривую можно параметризовать различными способами. Непрерывно дифференцируемая функция $t(\tau)$, отображающая $[0, 1]$ на $[0, 1]$, называется допустимой заменой параметра, если $t' \neq 0$.

Задача 17. Докажите, что модуль выражения $\int_{\gamma} \omega$ не зависит от допустимой замены параметра $t(\tau)$, а знак меняется или не меняется в зависимости от отрицательности или положительности t' .

Задача 18. Докажите, что $\int_{\gamma} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$.

Задача 19. Пусть γ – гладкая замкнутая ($\gamma(0) = \gamma(1)$) кривая на плоскости, не проходящая через $(0, 0)$. Докажите, что выражение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

равно целому числу. Найдите это число для случая, когда $\gamma(t) = (\cos nt, \sin nt)$. Каков геометрический смысл этого целого числа?

Указание: вычислите $d(\arctg \frac{y}{x})$.

Если форма является дифференциалом некоторой функции, то говорят, что эта форма точная. Из задачи 19 видно, что не всякая 1-форма является точной.

Задача 20. Пусть $a_k(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на \mathbb{R}^n . Предположим, что $\frac{\partial a_k}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}$. Докажите, что форма $a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n$ является дифференциалом некоторой функции f .

Указание: $f(x) = \int_0^1 x_1 a_1(tx) + \dots + x_n a_n(tx) dt$.