НМУ, I курс, 13.02.2015

Листок 1. Интеграл.

Дифференцируемая функция F на интервале (a,b) называется первообразной или неопределенным интегралом функции f, если $F'=f$. Далее обозначаем $F=\int f(x)\,dx$. Ясно, что функция F определена с точностью до добавления константы.

Задача 1. Раскладывая на простейшие дроби укажите алгоритм интегрирования произвольной рациональной функции.

Задача 2. Найдите $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$.

Пусть $g(x,y)$ – неприводимый многочлен. Кривая, заданная уравнением $g(x,y)=0$, называется рациональной, если существует пара рациональных функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$ такая, что $g(x(t),y(t))=0$ для всех t кроме конечного числа и для всех точек кривой (x_0,y_0) кроме конечного числа существует t_0, для которого $x(t_0)=x_0$ и $y(t_0)=y_0$.

Задача 3. Найдите рациональную параметризацию кривых $x^2+y^2=1$ и $x^2-y^2=1$. Объясните как найти первообразные $\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx$, $\int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx$, $\int R(x,\sqrt{1+x^2})\,dx$, где R – произвольная рациональная функция.

Задача 4. Покажите, что всякая кривая, заданная уравнением $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, является рациональной.

Задача 5. Докажите, что кривая $x^n+y^n=1$ при $n\geq 3$ не является рациональной.

Пусть $g(x,y)$ – неприводимый многочлен степени n. Точка (x_0,y_0) кривой $g(x,y)=0$ называется особой точкой кратности $k\geq 2$, если после замены $u=x-x_0$, $v=y-y_0$ у многочлена $\widetilde{g}(u,v)=g(u+x_0,v+y_0)$ нет членов степени $\leq k-1$.

Задача 6. Пусть g – неприводимый многочлен степени $n=3$. Предположим, что у соответствующей кривой есть ровно одна особая точка кратности 2. Докажите, что это рациональная кривая. Попробуйте обобщить эту задачу на случай $n\geq 4$.

Задача 7. Найдите $\int \frac{\sin x}{\cos x+3\sin x}\,dx$, $\int x^n e^x\,dx$, $\int \sin^n x\,dx$, $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

Задача 8. Пусть $G=\int g(y)\,dy$ и $F=\int f(x)\,dx$ на (a,b). Докажите, что дифференцируемая функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $g(y)y'=f(x)$ на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда $G(y(x))=F(x)+C$ для всех $x\in(a,b)$ и некоторого C. Решите уравнение $y'=\lambda y$.

Задача 9. (Остывание чайника) Исходя из того, что скорость остывания чайника пропорциональна разности его температуры и температуры воздуха, выведите зависимость температуры чайника от времени и оцените время его остывания до комнатной температуры.

Задача 10. (Водяные часы) Известно, что скорость истечения воды из небольшого отверстия на дне сосуда достаточно точно может быть вычислена по формуле $0,6\sqrt{2gH}$, где g – ускорение силы тяжести, а H – высота уровня воды над отверстием. Какую форму должен иметь сосуд, являющийся телом вращения, чтобы при стечении из него воды уровень воды понижался равномерно?

Пусть p – многочлен. Положим по определению $\int_a^b p(x)\,dx := P(b)-P(a),\quad P'=p$. Из определения ясно, что интеграл не зависит от выбора P, линеен по p и аддитивен, т. е. $\int_a^c+\int_c^b=\int_a^b$.

Упр 1. Проверьте перечисленные свойства.

Задача 11. Пусть p,h – многочлены. Докажите, что (a) если $p\leq h$, то $\int_a^b p(x)\,dx\leq\int_a^b h(x)\,dx$;

(b) (теорема о среднем) $\int_a^b p(x)\,dx=p(c)(b-a)$ для некоторой точки $c\in(a,b)$;

(c) $\int_a^b p(x)\,dx=\lim\limits_{\max_i|\Delta_i|\to 0}\sum_i p(\xi_i)|\Delta_i|$; (d) если $p_n\rightrightarrows f$ на $[a,b]$, то $\lim_{n\to\infty}\int_a^b p_n(x)\,dx$ существует и не зависит от выбора последовательности p_n, а только от f.

Используя пункт (d) предыдущей задачи и теорему Вейерштрасса мы можем определить интеграл от непрерывной функции: $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b p_n(x)\,dx,\quad p_n\rightrightarrows f$.

Задача 12. Пусть f – непрерывная функция на $[a,b]$. Докажите, что

(a) выполняются утверждения упр 1 и пунктов (a), (b), (c) предыдущей задачи, но для f;

(b) функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ непрерывно дифференцируема, $F'(x) = f(x)$ и выполняется формула Ньютона–Лейбница: $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a), \quad \mathcal{F}' = f$;

(c) (формула интегрирования по частям) $\int_a^b fg'\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b gf'\,dx$;

(d) (формула замены переменной) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Задача 13. Пусть $f : [1; +\infty) \to (0; +\infty)$ — монотонно убывающая непрерывная функция. Докажите, что ряд $\sum_{i=1}^\infty f(i)$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx$. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p \ln^q n}$.

Задача 14. Вычислите индукцией по n интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

Задача 15. Пусть $f > 0$ – непрерывная функция. Найдите $\lim_{p\to+\infty} \left(\int_0^1 f^p\,dx\right)^{1/p}$.

Как определить интеграл на более широком классе функций? Возможны два пути: изменить класс «простых» функций (в нашем случае многочленов), с которых начинается определение интеграла, или изменить вид сходимости (в нашем случае равномерную). Однако, поточечная сходимость не подходит.

Задача 16. Приведите пример последовательности f_n непрерывных функций, которые поточечно сходятся к нулю, но их интегралы по $[0, 1]$ не имеют предела.

Задача 17. Пусть последовательность непрерывных функций f_n поточечно сходится к нулю, причем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n, m > N \quad \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|\,dx < \varepsilon. \quad (*)$$

Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = 0$.

Мерой интервала, отрезка, полуинтервала (a, b) называем число $b - a$ и пишем

$$\lambda((a, b)) = \lambda((a, b]) = \lambda([a, b)) = \lambda([a, b]) := b - a.$$

Всякое открытое множество U можно представить в виде объединения не более чем счетного набора непересекающихся интервалов, $U = \sqcup_k(\alpha_k, \beta_k)$. Далее полагаем $\lambda(U) = \sum_k \lambda((\alpha_k, \beta_k))$. Множество (не обязательно открытое) имеет меру ноль по Лебегу, если его можно покрыть открытым множеством сколь угодно малой меры.

Задача 18. Докажите, что

(a) не более чем счетный набор точек является множеством меры ноль;

(b) множество Кантора имеет меру ноль; (c) отрезок $[a, b]$, $a < b$, не является множеством меры ноль;

(d) подмножество множества меры ноль является множеством меры ноль, не более чем счетное объединение множеств меры ноль является множеством меры ноль.

Если некоторое свойство имеет место для всех точек кроме множества меры ноль, то говорят, что это свойство выполнено почти всюду.

Задача 19. Докажите, что заключение задачи 17 остается в силе, если предполагать, что f_n сходятся к нулю почти всюду и для них выполняется условие (*).

Задача 20. Пусть последовательность непрерывных функций f_n почти всюду сходится к некоторой функции f на $[a, b]$ и выполняется условие (*). Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$, причем этот предел не зависит от последовательности f_n, а только от f.

Теперь, можно определить интеграл от функции f, как предел интегралов от f_n. Этот интеграл называют интегралом Лебега, а множество функций f, удовлетворяющих условиям задачи 20, обозначают через $\mathcal{L}[a, b]$.

Упр 2. Докажите в условиях задачи 20, что $\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f|\,dx = 0$.

Упр 3. Докажите линейность, монотонность и аддитивность интеграла Лебега.

Упр 4. Докажите, что монотонная ограниченная функция интегрируема по Лебегу.

Задача 21. Пусть f – непрерывная функция на $[a, b]$ и $f \geq 0$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda\{x : f(x) > t\}\,dt.$$

Задача 22. Докажите неравенство Чебышева $\lambda\{x : f(x) > A\} \leq A^{-1} \int_a^b f(x)\,dx$.