ЛИСТОК 10. ТЕОРЕМА РУФФИНИ–АБЕЛЯ.

Пусть $S \stackrel{\text{def}}{=} \{(t,x) \subset \mathbb{C}^2 \mid t^5 - 5t + x = 0\}$, а $f : S \to \mathbb{C}$ — проекция $f(t,x) = x$.

Задача 1. Найдите точки $c \in \mathbb{C}$, для которых $f^{-1}(c) \subset S$ состоит менее чем из 5 точек. Опишите множество $f^{-1}(c)$ для этих точек c.

Ответ. $c = \pm 4, \pm 4i$.

Задача 2. Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{4, -4, 4i, -4i\}$ — непрерывная кривая, $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$. а) Докажите, что для произвольного $a \in M_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{0, h, -h, hi, -hi\}$, где $h = \sqrt[4]{5}$, существует единственная непрерывная кривая $\Gamma : [0,1] \to S$ такая, что $f(\Gamma(t)) = \gamma(t)$ и $\Gamma(0) = a$. б) Докажите, что $\Gamma(1) \in M_0$. в) Докажите, что при гомотопии кривой γ, не меняющей значения $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$, кривая Γ также подвергается гомотопии, причем $\Gamma(1)$ не изменяется.

Таким образом для каждой кривой γ из задачи 2 определено отображение $\sigma(\gamma) : M_0 \to M_0$, ставящее в соответствие точке $a = \Gamma(0) \in M_0$ точку $\Gamma(1) \in M_0$.

Задача 3. а) Докажите, что σ — действие группы $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{\pm 4, \pm 4i\})$ на множестве M_0 перестановками. б) Пусть $a \in \{\pm 4, \pm 4i\}$. Обозначим γ_a кривую, состоящую из отрезка, соединяющего 0 с точкой $(1-\varepsilon)a$, где $\varepsilon > 0$ мало, окружности с центром a, проходящей через $(1-\varepsilon)a$, и отрезка из $(1-\varepsilon)a$ в 0 в обратную сторону. Докажите, что $\sigma(\gamma_a)$ — транспозиция, и что $\sigma(\gamma_4 \cdot \gamma_{4i} \cdot \gamma_{-4} \cdot \gamma_{-4i})$ — цикл из 5 элементов. в) Докажите, что образ гомоморфизма σ — вся группа S_5.

Задача 4. Пусть L — поле разложения многочлена $t^5 - 5t + x$ над полем $\mathbb{C}(x)$. Докажите, что а) существует подполе поля функций на поверхности S, изоморфное L; б) группа Галуа $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{C}(x))$ действует перестановками на множестве M_0; в) для всякой кривой γ из задачи 2 перестановка $\sigma(\gamma)$ принадлежит $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{C}(x))$; г) $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{C}(x)) = S_5$.

Всякий элемент $x \in S_n$ однозначно представляется в виде произведения непересекающихся циклов. Набор длин этих циклов называется циклическим типом перестановки x.

Задача 5. а) Пусть $x, y \in S_n$. Докажите, что циклические типы перестановок x и yxy^{-1} одинаковы. Как отличаются сами циклы? б) Докажите, что если нормальная подгруппа $G \subset A_5$ содержит хотя бы один цикл длины 3 (это четная перестановка!), то она содержит их все и совпадает с A_5. в) Докажите, что если нормальная подгруппа $G \subset A_5$ содержит хотя бы одну перестановку вида $(ij)(kl)$, то она содержит все перестановки этого циклического типа и совпадает с A_5. г) Какое из утверждений пунктов 5б и 5в неверно для группы A_4? д) Докажите, что группа A_5 не имеет нормальных подгрупп, отличных от $\{1\}$ и самой A_5. е) (теорема Руффини–Абеля) Докажите, что функцию $g : S \to \mathbb{C}$, заданную формулой $g(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} t$, нельзя получить из функции f (см. в начале листка) с помощью арифметических действий и извлечения корней любой степени.