Задачи к курсу Топология 3 (НМУ, весна 2015). Листок 7.

<u>Задача 1</u>. Докажите, что образ обратимого элемента $1-t+t^2$ группового кольца $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_5] \cong \mathbb{Z}[t]/(t^5-1)$ при отображении в группу Уайтхеда $Wh(\mathbb{Z}_5)$ имеет бесконечный порядок.

<u>Задача 2</u>. Вычислите $K_1(\mathbb{H})$.

<u>Задача 3</u>. Обозначим через W_ε комплексную кривую в $\mathbb{C}P^2$, заданную в однородных координатах $x:y:z$ уравнением $x^2+y^2+\varepsilon z^2=0$; обозначим через E подмножество в $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}$, состоящее из таких пар (w,ε), что $w \in W_\varepsilon$, $\varepsilon \in S^1 = \{|\varepsilon|=1\}$. Докажите, что проекция $E \to S^1$, $(w,\varepsilon) \mapsto \varepsilon$ — локально тривиальное расслоение. Тривиально ли это расслоение?

<u>Определение</u>. Отображение $p\colon E \to B$, где B линейно связно, называется *расслоением Серра*, если оно удовлетворяет условию поднятия гомотопии для клеточных пространств: для всякого клеточного пространства X, семейства непрерывных отображений $h_t\colon X \to B$, $t \in [0,1]$, и такого непрерывного отображения $H_0\colon X \to E$, что $p \circ H_0 = h_0$, найдётся такое семейство непрерывных отображений $h_t\colon X \to E$, что $p \circ H_t = h_t$ при всех t.

<u>Задача 4</u>. Пусть $p\colon E \to B$ — расслоение Серра.

а) Докажите, что прообразы точек базы B слабо гомотопически эквивалентны друг другу.

б) Пусть $x \in B$, $F = p^{-1}(x)$, $y \in F$. Докажите, что проекция p индуцирует изоморфизм между $\pi_n(E,F,y)$ и $\pi_n(B,x)$ при всех $n \geqslant 0$.

в) Докажите точность последовательности гомотопических групп

$$\cdots \to \pi_n(F,y) \to \pi_n(E,y) \to \pi_n(B,x) \to \pi_{n-1}(F,y) \to \cdots \to \pi_0(B,x).$$

<u>Задача 5</u>. а) Пусть X — топологическое пространство, $x_0 \in X$. Рассмотрим пространство $E(X,x_0)$, состоящее из таких путей $f\colon [0,1] \to X$, что $f(0)=x_0$. Докажите, что отображение $p\colon E(X,x_0) \to X$, $p(f)=f(1)$ — расслоение Серра, слой которого над x_0 - пространство петель $\Omega(X,x_0)$.

б) Докажите, что $\pi_n(\Omega(X,x_0),f_0) = \pi_{n+1}(X,x_0)$ при всех $n \geqslant 0$ и $f_0 \in \Omega(X,x_0)$.

<u>Задача 6</u>. Докажите, что всякое непрерывное отображение f представимо в виде композиции $p \circ g$, где g — слабая гомотопическая эквивалентность, p — расслоение Серра.

<u>Задача 7</u>. Расклассифицируйте вещественные и комплексные векторные расслоения размерности $\leqslant 4$ над сферами размерности $\leqslant 4$.

<u>Задача 8</u>. Докажите, что все классифицирующие пространства данной топологической группы слабо гомотопически эквивалентны друг другу.