Задачи к курсу Топология 3 (НМУ, весна 2015). Листок 5.

Задача 1. Вычислите фундаментальную группу бутылки Клейна K^2. Найдите гомотопические классы отображений из S^1 в K^2.

Задача 2. В каких случаях естественное отображение из фундаментальной группы связного топологического пространства X в множество гомотопических классов отображений $S^1 \to X$ биективно?

Задача 3. Пользуясь тем, что $\pi_2(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_2(S^2)$ (накрытие $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ индуцирует изоморфизмы старших гомотопических групп), вычислите $\pi_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1)$.

Задача 4. а) Пусть (X, A) — пара линейно связных топологических пространств ($A \subset X$). Доказать, что найдётся такая клеточная пара (X', A') и такое непрерывное отображение $f\colon (X', A') \to (X, A)$, что f задаёт слабые гомотопические эквивалентности из X' в X и из A' в A.

б) Пусть X — топологическое пространство, X' — клеточное пространство, $f\colon X' \to X$ — слабая гомотопическая эквивалентность. Доказать, что для всякого клеточного пространства Y и всякого непрерывного отображения $g\colon Y \to X$ найдётся такое непрерывное отображение $\varphi\colon Y \to X'$, что $g = f \circ \varphi$.

в) Пусть X — топологическое пространство, X', X'' — клеточные пространства, $f'\colon X' \to X$, $f''\colon X'' \to X$ — слабые гомотопические эквивалентности. Доказать, что X' и X'' гомотопически эквивалентны.

г) Доказать, что слабо гомотопически эквивалентные клеточные пространства гомотопически эквивалентны.

Задача 5. Пусть X, Y — линейно связные клеточные пространства, $f\colon X \to Y$ — такое непрерывное отображение, что индуцированные отображения $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$, $H_n(X) \to H_n(Y)$ — изоморфизмы (при всех n). Доказать, что f — гомотопическая эквивалентность.

Задача 6. Пусть X, Y — топологические пространства. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *собственным*, если для любого компакта $A \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(A)$ компактен. Собственные отображения из X в Y называются *собственно гомотопными*, если существует связывающая их гомотопия $[0,1] \times X \to Y$, которая является собственным отображением. Пространства X, Y называются *собственно гомотопически эквивалентными*, если существуют такие собственные непрерывные отображения $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, что отображения $f \circ g$ и $g \circ f$ собственно гомотопны тождественным.

а) Докажите, что пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ собственно гомотопически неэквивалентны при $n \neq m$.

б) Найдите классы собственной гомотопии отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.