Задачи к курсу Топология 3 (НМУ, весна 2015). Листок 2.

Задача 1. Пусть X — топологическое пространство, $\varphi_0, \varphi_1 \colon S^n \to X$ — гомотопные отображения.
а) Докажите, что топологические пространства $X \sqcup_{\varphi_0} B^{n+1}$ и $X \sqcup_{\varphi_1} B^{n+1}$ гомотопически эквивалентны.
б) Останется ли утверждение верным, если заменить (B^{n+1}, S^n) произвольной клеточной парой?

Задача 2. Пусть X, Y — топологические пространства. Множество $C(X,Y)$ непрерывных отображений из X в Y наделяется *компактно-открытой* топологией, предбаза которой определяется следующим образом: паре $K \subset X$, $V \subset Y$, где K — компакт, а V открыто, отвечает элемент предбазы $U_{K,V} = \{\, f \mid f(K) \subset V\}$.
а) Докажите, что если X компактно, а топология на Y задаётся метрикой ρ, то компактно-открытая топология на $C(X,Y)$ задаётся метрикой

$$\hat{\rho}(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} \rho(f_1(x), f_2(x)).$$

б) Докажите, что если X локально компактно и хаусдорфово (например, является локально конечным клеточным пространством), то отображение $F \colon [0,1] \times X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение

$$F' \colon [0,1] \to C(X,Y), \quad \big(F'(t)\big)(x) = F(t,x).$$

в) Что из предыдущего утверждения справедливо для случая, когда X — одномерное клеточное пространство из задачи 1 листка 1, $Y = \mathbb{R}$?

Задача 3. Пусть $\mathbb{R}^\infty$ – одно из следующих топологических пространств:
а) прямой предел $\varinjlim \mathbb{R}^n$; б) прямое произведение счётного числа копий $\mathbb{R}$;
в) вещественное гильбертово пространство.

Для $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ обозначим $\|x\| = \sum_i |x_i|^2$ (в случае (б) значение $\|x\|$ может быть бесконечным). Рассмотрим в $\mathbb{R}^\infty$ бесконечномерный шар $B^\infty = \{\, x \mid \|x\| \leqslant 1\}$ и бесконечномерную сферу $S^\infty = \{\, x \mid \|x\| = 1\}$. Определим отображения $f \colon S^\infty \to S^\infty$, $f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ и $P \colon B^\infty \setminus \{0\} \to S^\infty$, $P(x) = x/\|x\|$. Пусть $z = (1, 0, 0 \ldots)$.

Для каких из пространств $\mathbb{R}^\infty$ верно, что отображение

$$H_1 \colon [0,1] \times S^\infty \to S^\infty, \ H_1(t,x) = P(tf(x) + (1-t)x)$$

задаёт гомотопию между тождественным отображением сферы и отображением f, а отображение

$$H_2 \colon [0,1] \times S^\infty \to S^\infty, \ H_2(t,x) = P(tz + (1-t)f(x))$$

задаёт гомотопию между отображением f и отображением в точку z?