Задачи к курсу Топология 3 (НМУ, весна 2015). Листок 1.

Задача 1. *Конусом* над топологическим пространством X называется топологическое пространство $\mathrm{Cone}(X)$, полученное из $[0,1]\times X$ стягиванием подпространства $\{0\}\times X$ в точку. Если X – подмножество $\mathbb{R}$, назовём *геометрическим конусом* $\mathrm{GCone}(X)$ подпространство в $\mathbb{R}^2$, являющееся объединением отрезков, которые соединяют точку $(0,1)$ с точками множества $X\times\{0\}$.

Рассмотрим следующие топологические пространства:

(1) $\mathrm{Cone}(\mathbb{N})$; (2) $\mathrm{Cone}(\{0\}\cup\{1/n\,|\,n\in\mathbb{N}\})$;

(3) $\mathrm{GCone}(\mathbb{N})$; (4) $\mathrm{GCone}(\{0\}\cup\{1/n\,|\,n\in\mathbb{N}\})$;

(5) Одномерное клеточное пространство с нульмерными клетками $e_0^{(0)}, e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \dots$ и одномерными клетками $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}, \dots$, где замыкание $e_k^{(1)}$ содержит $e_0^{(0)}$ и $e_k^{(0)}$.

(6) Подпространство прямого предела $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \mathbb{R}^n$, образованное отрезками, соединяющими начало координат с точками с координатой 1 на каждой оси.

Какие из этих пространств а) компактны? б) хаусдорфовы? в) метризуемы? г) гомеоморфны?

д) Для каких пар этих пространств существует непрерывное взаимно-однозначное отображение одного в другое?

Задача 2. Доказать, что если клеточное пространство локально конечно, то оно метризуемо.

Задача 3. Существует ли такая топология на $\mathbb{R}$, что для всякой последовательности (x_n) действительных чисел и всякого $a\in\mathbb{R}$ верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ в этой топологии тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ в стандартной топологии.