

## Домашнее задание 3

В задачах 3.1–3.3 речь идет о представлениях алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$ .

**3.1. а)** Пусть  $V_n$  —  $n$ -мерное неприводимое представление  $\mathfrak{sl}_2$ . Докажите, что

$$\mathrm{Sym}^2 V_n = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} V^{2n-4i}.$$

**б)** Найдите аналогичную формулу для разложения  $\Lambda^2 V_n$ .

**3.2 (Двойственность Эрмита).** Докажите, что  $\mathrm{Sym}^k V_n \cong \mathrm{Sym}^n V_k$ .

**3.3.** Покажите, что  $\Lambda^n V_k \cong \mathrm{Sym}^k V_{n+1-k}$ .

**3.4.** Пусть  $V$  — стандартное (трехмерное) представление алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_3$ ,  $\mathrm{ad}$  — присоединенное представление той же алгебры. Разложите на неприводимые:

**а)**  $V \otimes V$ ; **б)**  $V \otimes V^*$ ; **в)**  $V \otimes \mathrm{ad}$ .

Решения этого задания нужно сдать в письменном виде до 15:30 (т.е. до начала лекции) 24 апреля 2014 г.