НМУ, Дифференциальная геометрия (2-й семестр). Листок 1. 14 февраля 2014 г.

Связность в векторном расслоении

“Герой” серии задач 1–3 — тавтологическое расслоение ξ над $\mathbb{RP}^1$: слой над точкой $a \in \mathbb{RP}^1$ это одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$, представляемое a.

Задача 1. Введите в расслоении ξ локальные тривиализации и систему функций перехода.

Пусть ∇ — ковариантное дифференцирование, ковариантно постоянные сечения которого соответствуют кривым $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию $|\gamma(t)| = \mathrm{const}$.

Задача 2. Выпишите формулы для форм связности и символов Кристоффеля этого ковариантного дифференцирования в системе координат, введенной в задаче 1.

Задача 3. Докажите, что это дифференцирование — плоское. Вычислите его монодромию.

Обозначим $\Omega_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \neq z_2\}$. Ковариантное дифференцирование на тривиальном k-мерном расслоении $\Omega_2 \times \mathbb{C}^k$ задается формулой $\nabla w = dw - \frac{A}{z_1 - z_2}(dz_1 - dz_2)w$, где $w(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^k$ — сечение, а $A : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ — линейный оператор.

Задача 4. Вычислите явно параллельный перенос вдоль кривой $\gamma(t) = (z_1(t), z_2(t))$. Докажите, что ковариантное дифференцирование ∇ плоское, и вычислите монодромию.

Задача 5. Во всяком ли гладком векторном расслоении можно ввести связность?

Задача 6. Докажите, что в гладком векторном расслоении можно ввести плоскую связность тогда и только тогда, когда коцикл $\{g_{ij}\}$ можно выбрать так, что $g_{ij}(x) = \mathrm{const}$ при всех i и j.