ЭКЗАМЕН ?? ФЕВРАЛЯ 2014 Г.

Пожалуйста, напишите на первой странице работы Ваше имя и фамилию в именительном падеже, и более ничего на этой странице не пишите. Также постарайтесь, чтобы на каждой компоненте связности работы было написано Ваше имя. Если в задаче требуется ответ, то начните запись решения с формулировки ответа (даже если в тексте решения потом ответ будет еще раз).

Решения задач нужно сдать в письменном виде до ?? февраля 2014 г. в учебную часть Независимого университета. Там же после ??? можно будет посмотреть проверенные работы с замечаниями.

Задача 1. Существует ли в $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ двумерное подмногообразие, ортогональное (относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^4$) векторному полю $A(x_1, \dots, x_4) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3)$?

Задача 2. а) Докажите, что векторное поле $X = \cos\psi \frac{\partial}{\partial\psi}$ на сфере S^2, где (ψ, φ) — широта и долгота, гладко продолжается в полюса сферы. б) Вычислите размерность пространства векторных полей на S^2, коммутирующих с X.

Задача 3. Сколько существует, с точностью до изоморфизма, линейных расслоений (т.е. вещественных векторных расслоений ранга 1) на бутылке Клейна?

Задача 4. Дифференциальная форма ω на $S^2 \times S^2$ называется четной, если $\sigma^*\omega = \omega$, где $\sigma : S^2 \times S^2 \to S^2 \times S^2$ – преобразование, меняющее местами сомножители. Докажите, что четные формы образуют подкомплекс в комплексе де Рама многообразия $S^2 \times S^2$, и вычислите когомологии этого подкомплекса.

Указание. Когомологии комплекса де Рама сферы S^2 считайте известными.

Задача 5. Замкнутая кривая $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3$ называется лежандровым узлом, если она гладкая (γ' определена, непрерывна и не обращается в нуль), не имеет самопересечений и $\gamma^*\nu = 0$, где $\nu = dz - p\,dq$ (p, q, z — стандартные координаты в $\mathbb{R}^3$). Пусть $\gamma(t) = (p(t), q(t), z(t))$ — лежандров узел, а $\Gamma(t) = (p(t), q(t))$ — его ортогональная проекция на плоскость (p, q). а) Докажите, что Γ — гладкая кривая. б) Может ли Γ быть окружностью? в) А кривой $\{(x, y) \mid y^2 = x^2(1-x^2)\}$? г) Обязательно ли индекс Уитни Γ (количество оборотов вектора $\Gamma'(t)$ вокруг начала координат, когда t пробегает окружность S^1) равен нулю?