Комплексный анализ. Задачи к лекциям 5 и 6. 11 и 18 марта 2014 г.

1. *Вокруг теоремы Руше.* (A) Найдите число нулей полинома z^5+5z^2+2z+1 в кольце $1<|z|<2$ и функции e^z-4z+i в круге $|z|<1$. (B) Покажите, что уравнение $e^z=2z^2+1$ имеет в круге $|z|<1$ только вещественные решения, а для уравнения $e^z=2z^4+1$ это неверно. (*Указание.* Проверьте, что $|e^z-1|\leqslant e-1$ при $|z|=1$). (C) Докажите или опровергните: для любого $\varepsilon>0$ уравнение $(z+i)\sin z=2014$ имеет бесконечно много решений в полосе $|\operatorname{Im} z|<\varepsilon$.

2. *Вокруг принципа аргумента.* (A) Пусть $a,b>0$. Найдите число нулей полинома $z^{10}+az^9+b$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ и $z^7+az^4+bz^3+1$ в первом квадранте. (*Указание.* Примените принцип аргумента на пересечении указанной области с кругом $\{|z|<R\}$. Образ прямолинейной части границы можно найти точно, а образ дуги окружности — приближенно, как в теореме Руше, при $R\to\infty$.) (B) Найдите число нулей полинома $z^6-z^5+z^3-z+1$ в каждом из четырех квадрантов. Проверьте полученный ответ, пользуясь тем, что все нули — корни 12-й степени из 1. (C) Пусть $P(z)$ — полином, не обращающийся в нуль на $i\mathbb{R}$. Покажите, что предел

$$\frac{1}{2\pi}\Delta\arg_{i\mathbb{R}} P(z) := \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\Delta\arg_{[-iR,iR]} P(z)$$

всегда существует, но никогда не равен числу нулей $P(z)$ ни в правой, ни в левой полуплоскости, если только $P(z)\not\equiv \mathrm{const}$.

3. *Полюсы f'/f.* Пусть $f\in\mathcal{O}(0<|z|<1)$ и $f'(z)/f(z)$ имеет при $z=0$ полюс первого порядка. Покажите, что $f(z)$ имеет при $z=0$ нуль или полюс.

4. *Разными путями к одному и тому же.* Пусть $U=\{|z|<1\}$. Докажите следующие утверждения как можно бóльшим числом способов (в каждом случае есть по крайней мере два способа).

(A) Если $f\in\mathcal{O}(\overline{U})$ и $f(U)\cap U$ непусто, а $f(\partial U)\cap U$ пусто, то $U\subset f(U)$.

(B) Если $f\in\mathcal{O}(U)\cap C(\overline{U})$ и $\operatorname{Re} f\equiv 0$ на ∂U, то $f\equiv\mathrm{const}$.

(C) Не существует последовательности полиномов $P_n(z)$, равномерно сходящейся к $1/z$ на ∂U.

5. *Функции, вещественные только при вещественных значениях аргумента.* (A) Пусть $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ и $f(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Покажите, что $f(z)\equiv az+b$ для некоторых $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbb{R}$. (B) Приведите пример $f\in\mathcal{M}(\mathbb{C})$ такой, что $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ и $f(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})\subset\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, но $f(z)\not\equiv az+b$. (C) Пусть $U:=\{|z|<1\}$, $J:=U\cap\mathbb{R}$. Приведите пример $f\in\mathcal{O}(U)$ такой, что $f(J)\subset J$ и $f(U\setminus J)\subset U\setminus J$, но $f(z)\not\equiv az+b$. (D) Верно ли, что всякая функция f, удовлетворяющая условиям (C), конформно отображает U на $f(U)$? (E) Докажите или опровергните: если $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ такова, что $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ и $f(i\mathbb{R})\subset i\mathbb{R}$, то $f(-z)=-f(z)$ для всех $z\in\mathbb{C}$.

6. *Комплексная теорема Ролля.* Пусть $f\in\mathcal{O}(a)$. Покажите, что для любого $\varepsilon>0$ в ε-окрестности точки a найдутся точки $z_1\neq z_2$ такие, что

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=f'(a).$$

7. *Вокруг принципа максимума.* (A) Пусть $f \in \mathcal{O}(1 \leqslant |z| \leqslant 3)$, $|f(z)| \leqslant 1$ при $|z| = 1$ и $|f(z)| \leqslant 9$ при $|z| = 3$. Докажите, что $|f(z)| \leqslant 4$ при $|z| = 2$. (B) Верно ли, что если $P(z)$ — полином степени n и $|P(z)| \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1$, то $|P(z)| \leqslant |z|^n$ при $|z| \geqslant 1$? (C) Пусть $U := \{|z| < 1\}$ и функция $f \in \mathcal{O}(U) \cap C(\overline{U})$ такова, что $|f(z)| = 1$ при $|z| = 1$. Покажите, что

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z} \quad \text{для некоторых} \quad \theta \in \mathbb{R},\ a_1, \dots, a_n \in U.$$

(*Указание.* Сначала дополнительно предположите, что f не имеет нулей на U.) (D) Пусть $f \in \mathcal{O}(\overline{U})$ такова, что $|f(z)| \leqslant A$ на $\partial U \cap \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и $|f(z)| \leqslant B$ на $\partial U \cap \{\operatorname{Im} z \leqslant 0\}$. Покажите, что $|f(0)| \leqslant \sqrt{AB}$. Существует ли при $B \neq A$ такая функция $f \not\equiv \mathrm{const}$, для которой последнее неравенство является равенством? (E) Для любых чисел $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, не все из которых равны нулю, имеем $\max_{|z|=1} |z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| > 1$. (F) Докажите или опровергните: для любых полиномов $P(z)$, $Q(z)$ со старшим коэффициентом 1 имеем $\max_{\{|Q(z)|=1\}} |P(z)| > 1$, если только P и Q не являются степенями некоторого третьего полинома. (G) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, $f, g \in \mathcal{O}(D)$ и функция $|f| + |g|$ имеет (локальный нестрогий) максимум в точке $z_0 \in D$. Покажите, что f и g — константы.

8. *Расстояние от функции до пространства полиномов.* Пусть $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$ есть векторное пространство всех полиномов от z, а $U := \{|z| < 1\}$ — единичный круг. Для любой непрерывной функции $f : \partial U \to \mathbb{C}$ положим

$$d(f, \mathcal{P}) := \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{|z|=1} |f(z) - P(z)|.$$

(A) Покажите, что $d(f, \mathcal{P}) = 0$ тогда и только тогда, когда f есть сужение на ∂U некоторой функции $F \in \mathcal{O}(U) \cap C(\overline{U})$. (B) Для $a \in U$ положим $f_a(z) := 1/(z - a)$. Покажите, что $d(f_0, \mathcal{P}) = 1$, причем inf достигается при $P \equiv 0$. (C) Вычислите $d(f_a, \mathcal{P})$ для всех $a \in U$. Достигается ли inf?

9. *Вокруг принципа компактности.* (A) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, множество $E \subset D$ имеет предельную точку в D, а последовательность $f_n \in \mathcal{O}(D)$ равномерно ограничена на D и сходится в каждой точке множества E. Докажите, что она сходится равномерно на компактах в D. (B) Положим

$$f_1(z) = z, \qquad f_{n+1}(z) = z - \frac{1}{f_n(z)} \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Покажите, что последовательность $f_n(z)$ сходится равномерно на компактах в $\Pi := \{\operatorname{Im} z > 0\}$, причем предельная функция $f(z)$ конформно отображает Π на $f(\Pi)$, и найдите $f(\Pi)$. (C) Покажите, что последовательность $\operatorname{tg}(nz)$ сходится равномерно на компактах в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и найдите предел. (D) Пусть $f(z)$ голоморфна и ограничена в полуполосе $\{\operatorname{Re} z > a,\ |\operatorname{Im} z| < b\}$ и для некоторого $y_0 \in (-b, b)$ существует $\lim_{x\to\infty} f(x + iy_0) =: A$. Тогда $\lim_{x\to\infty} f(x + iy) = A$ для всех $y \in (-b, b)$. (E) С помощью функции $\exp\{e^{-z}\}$ покажите, что утверждение (D) неверно для неограниченных f.