Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 1 10 февраля 2014 года

Частной производной (обозначение: $\partial f/\partial x_1$) функции $f(x_1,x_2)$ двух аргументов называется обычная производная функции одного аргумента x_1, получаемой фиксированием какого-либо значения переменной x_2.

Определение. Функция $f(x_1,x_2)$ называется *дифференцируемой* в точке $a=(a_1,a_2)$, если она в окрестности этой точки отличается от некоторой линейной функции на члены малого порядка

$$f(x_1,x_2)=f(a_1,a_2)+A(x_1-a_1)+B(x_2-a_2)+o(r)\ ,\qquad r=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}\ .$$

1. Докажите, что дифференцируемость влечет существование частных производных. Выразите константы A и B через частные производные функции f. (Ответ: $A=\frac{\partial f}{\partial x_1}$; $B=\frac{\partial f}{\partial x_2}$).

2. Постройте примеры, показывающие, что из существования частных производных дифференцируемость вовсе не следует.

   Пусть $M\subset\mathbb{R}^2$ — некоторая область.

   Определение 1. *Касательным вектором* к M в точке $a\in M$ называется произвольная пара чисел $\xi=(\xi_1,\xi_2)$.

   Определение 2. Назовем две гладкие кривые $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$ и $y(t)=(y_1(t),y_2(t))$ *эквивалентными*, если они отличаются на члены малого порядка: $x(0)=y(0)=a$, $x_i(t)-y_i(t)=o(t)$. *Касательным вектором* к M в точке $a\in M$ называется класс эквивалентных кривых.

   Определение 3. *Дифференцированием* в точке $a\in M$ называется линейное соответствие D, сопоставляющее каждой дифференцируемой в точке a функции f число $D(f)$ так, что при этом выполняется равенство (называемое *тождеством Лейбница*)

   $$D(fg)=f(a)D(g)+D(f)g(a)$$

   для всяких f,g. *Касательным вектором* к M в точке $a\in M$ называется произвольное дифференцирование.

3. Докажите эквивалентность определений 1–3 касательного вектора. Укажите прямые соответствия, позволяющие перейти от каждой из трех интерпретаций касательного вектора к любой другой, например:

   2)→1): кривой $x(t)$ ставится в соответствие пара чисел $\xi=(x_1'(0),x_2'(0))$.

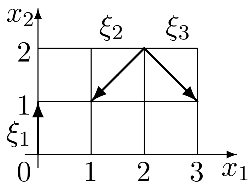
   2)→3): По кривой $x(t)$ можно построить дифференцирование D, которое сопоставляет функции f число $f(x(t))'\Big|_{t=0}$ (штрих — производная функции одной переменной, получающейся композицией f и x). Проверьте, что D действительно является дифференцированием.

   Касательным пространством в точке a (обозначение: T_aM) называется множество всех касательных векторов в этой точке.

4. Покажите, что на T_aM имеется структура векторного пространства. Какова его размерность? Выразите эту структуру (сложение векторов и умножение на числа) в различных интерпретациях касательных векторов.

   Дифференциалом df функции f в точке a называется функция на касательном пространстве $df:T_aM\to\mathbb{R}$. Значение дифференциала на касательном векторе, заданном кривой $x(t)$ равно $f(x(t))'\Big|_{t=0}$.

5. Найдите значения дифференциалов dx_1, dx_1x_2, $d(x_1^2+x_2^2)$ на касательных векторах, изображенных на рисунке.



6. Докажите, что дифференциал — линейная функция на касательном пространстве. Указание: воспользуйтесь (доказав, сперва) следующей формулой суперпозиции: пусть заданы дифференцируемая в точке a функция f двух аргументов и две дифференцируемые функции x_1, x_2 одного аргумента, такие, что $a=(x_1(0),x_2(0))$. Тогда

$$\frac{d}{dt}f(x_1(t),x_2(t))\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_a x_1'(0)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_a x_2'(0)\ .$$

Пространство линейных функций на T_aM называется *кокасательным пространством* в точке a и обозначается T_a^*M.

7. Докажите, что дифференциалы координатных функций dx_1, dx_2 образуют базис в этом пространстве. Разложите по этому базису дифференциал произвольной функции. (Ответ: $df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$). Как, зная это, упростить решение задачи 5?

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 2 17 февраля 2014 года

1. Нарисуйте линии уровня $z=\mathrm{const}$ и графики для следующих функций:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; б) $z=\sqrt[3]{x^2+y^2}$; в) $z=-y^2+x^2-x^4$; г) $z=\sqrt{-y^2+x^2-x^4}$;

д) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; е) $z=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; ж) $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; з) $z=\cos x-y^2$;

и) $z=\cos x\cos y$; к) $z=\sqrt[3]{x^2+y^4}$; л) $z=x^4+x^2y^2+y^5$.