Независимый Московский Университет

Программа
КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1-й курс 2-й семестр 2013-2014 уч. года

М. Э. Казарян

1. **Изображение кривых, заданных параметрически и неявно.** *Особые и характерные точки. Изображение кривой в окрестности особой точки. Поведение кривой на бесконечности. Асимптоты.*

2. **Дифференцируемость функций нескольких переменных.** *Производная функции по направлению. Примеры функций, имеющих частные производные, но не дифференцируемых. Теорема о равенстве смешанных производных. Производная композиции.*

3. **Формула Тейлора для функции многих переменных.**

4. **Критические точки функций.** *Максимумы, минимумы и седла функций двух переменных. Второй дифференциал (гессиан). Индекс Морса. Лемма Морса.*

5. **Теорема об обратной функции.** *Обратимость отображения и невырожденность матрицы Якоби. Производная обратной функции. Криволинейные координаты в области евклидова пространства.*

6. **Принцип сжимающих отображений.** *Доказательство теоремы об обратной функции.*

7. **Теорема об неявной функции.** *Производная функции, заданной неявно. Гладкие многомерные поверхности в евклидовых пространствах. Эквивалентность разных условий гладкости поверхности. Локальные координаты на поверхности.*

8. **Условные экстремумы.** *Вычисление производной ограничения функции на поверхность. Множители Лагранжа. Индекс Морса ограничения функции на поверхность.*

9. **Типичные особенности отображений поверхности в поверхность.** *Складки и сборки. Огибающие семейства кривых. Эвлюта (каустика) плоской кривой и устойчивость ее особых точек.*

Независимый Московский Университет
Математический анализ 1-й курс II семестр
Листок 1 10 февраля 2014 года

Частной производной (обозначение: $\partial f/\partial x_1$) функции $f(x_1, x_2)$ двух аргументов называется обычная производная функции одного аргумента x_1, получаемой фиксированием какого-либо значения переменной x_2.

Определение. Функция $f(x_1, x_2)$ называется *дифференцируемой* в точке $a = (a_1, a_2)$, если она в окрестности этой точки отличается от некоторой линейной функции на члены малого порядка

$$f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) + A(x_1 - a_1) + B(x_2 - a_2) + o(r)\ , \qquad r = \sqrt{(x_1{-}a_1)^2{+}(x_2{-}a_2)^2}\ .$$

1. Докажите, что дифференцируемость влечет существование частных производных. Выразите константы A и B через частные производные функции f. (Ответ: $A = \frac{\partial f}{\partial x_1}$; $B = \frac{\partial f}{\partial x_2}$).

2. Постройте примеры, показывающие, что из существования частных производных дифференцируемость вовсе не следует.

   Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая область.

   Определение 1. *Касательным вектором* к M в точке $a \in M$ называется произвольная пара чисел $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

   Определение 2. Назовем две гладкие кривые $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ и $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ *эквивалентными*, если они отличаются на члены малого порядка: $x(0) = y(0) = a$, $x_i(t) - y_i(t) = o(t)$. *Касательным вектором* к M в точке $a \in M$ называется класс эквивалентных кривых.

   Определение 3. *Дифференцированием* в точке $a \in M$ называется линейное соответствие D, сопоставляющее каждой дифференцируемой в точке a функции f число $D(f)$ так, что при этом выполняется равенство (называемое *тождеством Лейбница*)

   $$D(fg) = f(a)D(g) + D(f)g(a)$$

   для всяких f, g. *Касательным вектором* к M в точке $a \in M$ называется произвольное дифференцирование.

3. Докажите эквивалентность определений 1–3 касательного вектора. Укажите прямые соответствия, позволяющие перейти от каждой из трех интерпретаций касательного вектора к любой другой, например:

   2)→1): кривой $x(t)$ ставится в соответствие пара чисел $\xi = (x_1'(0), x_2'(0))$.

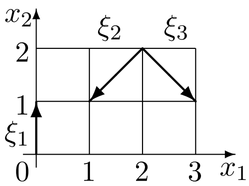
   2)→3): По кривой $x(t)$ можно построить дифференцирование D, которое сопоставляет функции f число $f(x(t))'\Big|_{t=0}$ (штрих — производная функции одной переменной, получающейся композицией f и x). Проверьте, что D действительно является дифференцированием.

   Касательным пространством в точке a (обозначение: T_aM) называется множество всех касательных векторов в этой точке.

4. Покажите, что на T_aM имеется структура векторного пространства. Какова его размерность? Выразите эту структуру (сложение векторов и умножение на числа) в различных интерпретациях касательных векторов.

   Дифференциалом df функции f в точке a называется функция на касательном пространстве $df : T_aM \to \mathbb{R}$. Значение дифференциала на касательном векторе, заданном кривой $x(t)$ равно $f(x(t))'\Big|_{t=0}$.

5. Найдите значения дифференциалов dx_1, dx_1x_2, $d(x_1^2+x_2^2)$ на касательных векторах, изображенных на рисунке.



6. Докажите, что дифференциал — линейная функция на касательном пространстве. Указание: воспользуйтесь (доказав, сперва) следующей формулой суперпозиции: пусть заданы дифференцируемая в точке a функция f двух аргументов и две дифференцируемые функции x_1, x_2 одного аргумента, такие, что $a=(x_1(0),x_2(0))$. Тогда

$$\frac{d}{dt}f(x_1(t),x_2(t))\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_a x_1'(0)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_a x_2'(0)\ .$$

Пространство линейных функций на T_aM называется *кокасательным пространством* в точке a и обозначается T_a^*M.

7. Докажите, что дифференциалы координатных функций dx_1, dx_2 образуют базис в этом пространстве. Разложите по этому базису дифференциал произвольной функции. (Ответ: $df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$). Как, зная это, упростить решение задачи 5?

Математический анализ 1-й курс II семестр
Листок 2   17 февраля 2014 года

1. Нарисуйте линии уровня $z=\mathrm{const}$ и графики для следующих функций:

$$\text{а) } z=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\quad \text{б) } z=\sqrt[3]{x^2+y^2}\ ;\quad \text{в) } z=-y^2+x^2-x^4\ ;\quad \text{г) } z=\sqrt{-y^2+x^2-x^4}\ ;$$
$$\text{д) } z=\frac{1}{x^2+y^2}\ ;\quad \text{е) } z=\frac{x}{x^2+y^2}\ ;\quad \text{ж) } z=\frac{xy}{x^2+y^2}\ ;\quad \text{з) } z=\cos x-y^2\ ;$$
$$\text{и) } z=\cos x\cos y\ ;\quad \text{к) } z=\sqrt[3]{x^2+y^4}\ ;\quad \text{л) } z=x^4+x^2y^2+y^5\ .$$

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 3   28 февраля 2014 года

Теорема (о неявной функции). *Пусть частные производные функции F двух переменных непрерывны в точке (x_0, y_0) и пусть $F(x_0, y_0) = 0$, $\partial F/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует и единственна функция $\varphi(x)$, заданная в некоторой окрестности точки x_0, удовлетворяющая уравнению $F(x, \varphi(x)) = 0$. Более того, функция φ дифференцируема и ее производная выражается формулой $\varphi'(x_0) = -\frac{\partial F/\partial x(x_0,y_0)}{\partial F/\partial y(x_0,y_0)}$.*

1. Выведите из теоремы о неявной функции теорему об обратной функции: *пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда f задает взаимно-однозначное соответствие некоторой окрестности точки x_0 на некоторую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$, т.е. функция f обладает обратной функцией $f^{-1}(y)$, удовлетворяющей $f^{-1}(f(x)) \equiv x$. Обратная функция дифференцируема и ее производная выражается формулой ${f^{-1}}'(y_0) = 1/f'(x_0)$.*

2. Пусть $y = y(x)$ — заданная функция, $y(x_0) = 0$. Выразите константы разложения $x = x(y) = x_0 + Ay + By^2 + o(y^2)$ через производные функции y.

3. Функция $y = \varphi(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

   а) Докажите, что если F бесконечно дифференцируема, то и φ бесконечно дифференцируема.

   б) Выразите φ'' через частные производные функции F.

4. Нарисуйте следующие кривые. Найдите особые точки, вертикальные и горизонтальные касательные. Найдите несколько членов ряда Тейлора для функций $y(x)$ и $x(y)$ в точке (x_0, y_0).

   а) $x^2 + xy + y^2 = 1;\quad (x_0, y_0) = (0, 1)$;

   б) $x^3 + y^3 = 2xy$, $x^4 + y^4 = 2xy;\quad (x_0, y_0) = (0, 0), (1, 1)$;

   в) $(x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 = 100$;   г) $(x^2 - y)^3 + x^2 + y^2 = 100$.

5. Под каким углом пересекаются гиперболы $x^2 + y^2 = a;\ xy = b$?

6. Нарисуйте следующие кривые, заданные параметрически:

$$\text{а) } \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \qquad \text{в) } \begin{cases} x = e^{\pm t} \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \qquad \text{д) } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \qquad \text{е) } \begin{cases} x = 2t^3 - 3t \\ y = t^4 - t^2 \end{cases}$$

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 4   7 марта 2014 года

1. Постройте кривые

$$\text{а) } x^4 + y^4 = x^2 y \qquad \text{б) } \begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin 5t \end{cases}$$

Якобианом отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется определитель его матрицы Якоби

$$J = \det \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1,\ldots,n}.$$

2. Рассмотрим отображение плоскости без начала координат в себя

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

   а) Найдите якобиан этого отображения;

   б) Найдите его якобиан в полярных координатах;

   в) Найдите обратное отображение;

   г) Найдите образ окружности $(x-a)^2 + y^2 = c^2$ при этом отображении.

3. Изобразите множество точек, в окрестности которых необратимо отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \sin xy \end{pmatrix}$$

4. Вычислите координаты касательных векторов $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}$, а также кокасательных векторов dx и dy на евклидовой плоскости, в полярных координатах.

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 5 14 марта 2014 года

1. Рассмотрим отображение плоскости в себя, задаваемое формулами:

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2\,x\,y \end{cases}$$

Что это отображение делает с плоскостью? Где применима теорема об обратном отображении? Что происходит там, где она неприменима?

2. Ответьте на те же вопросы для отображения $\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 2\,\varepsilon x \\ v = 2\,x\,y - 2\,\varepsilon y \end{cases}$

3. Нарисуйте на плоскости кривую $\begin{cases} x = t^3 - 8\,t \\ y = t^3 - t \end{cases}$. Доказжите, что при $t \to \infty$ эта кривая является графиком функции $y = y(x)$. Найдите асимптотику этой функции. Обоснуйте возможность асимптотики.

4. То же задание для кривой $\begin{cases} x = t^4 - 2\,t^2 \\ y = 3\,t^5 - 5\,t^3 \end{cases}$.

5. Можно ли представить в виде образа гладкой кривой следующие множества: а) окружность; б) $x^2 = y^3$; в) $x^2 = y^2$; г) граница квадрата; д) квадрат; е) круг без границы.

6. Какие плохие точки бывают у кривой $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$, где $p(t), q(t)$ — многочлены?

7. Пусть переменные x, y, z связаны одним уравнением $F(x, y, z) = 0$. Вычислите

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$$

где при вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ величина z рассматривается как неявно заданная функция от x и y и т.д.

Независимый Московский Университет
Математический анализ 1-й курс II семестр
Листок 6 21 марта 2014 года

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Пусть M — полное метрическое пространство. Пусть отображение $A : M \to M$ удовлетворяет $\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y)$ $\forall x, y$, $\alpha < 1$. Тогда у отображения A существует и единственна неподвижная точка $Ax = x$.*

1. Докажите теорему. Покажите, что для любой начальной точки x_0 выполняется оценка $\rho(A^k x_0, x) \leqslant s\frac{\alpha^k}{1-\alpha}$, где $s = \rho(Ax_0, x_0)$.

2. Докажите, что уравнение $x = x^3 + 0.1$ имеет корень вблизи нуля. Найдите его первые 5–10 десятичных знаков.

3. Докажите, что система
$$\begin{cases} x = (x^2 + y^2)/100 \\ y = (xy^2 + 0.1)/100 \end{cases}$$
имеет решение вблизи нуля. Найдите это решение с точностью до 10^{-10}.

4. Как переписать уравнение $x^2 = 2$, чтобы для его решения можно было применить принцип сжимающих отображений? Годится ли $x = 2/x$?

5. Решая уравнение $x^2 - ax + b = 0$, его переписали в виде $x = a - b/x$. При каких a, b, x_0 процесс последовательных приближений сходится? К какому из двух корней (если они есть)?

6. Докажите, что всякое непрерывное отображение а) отрезка $[0, 1]$, б) диска D^2 в себя имеет неподвижную точку.

7. Докажите, что среди решений системы от бесконечного числа переменных
$$x_n = \frac{1}{5}(x_{n+1} + x_{n-1}) + \frac{1}{1 + n^2}\ ; \quad n \in \mathbb{Z}$$
существует и единственно ограниченное.

8. Петя вышел из дома в школу, но на полпути передумал и повернул в кино. На полпути в кино он опять передумал и пошел домой. На полпути к дому у него взыграла совесть и он повернул в школу. На полпути к школе он опять повернул в кино, т.д. Каков будет предельный маршрут Пети после достаточно большого числа итераций?

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 7 28 марта 2014 года

1. Пусть функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз. Вычислите:
   (a) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \varphi(x^2 + y^2)$;
   (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.
2. Преобразуйте к полярным координатам:
   (a) $w = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$;
   (b) $w = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$;
   (c) $w = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
3. Найдите все функции f, удовлетворяющие условию:
   (a) $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$;
   (b) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
4. Пусть $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \qquad (1) \qquad$ и $f(x, y, z) = xy^2z^3$. Вычислите:
   (a) $f'_x(1, 1, 1)$, если x, y, z — независимые переменные;
   (b) $f'_x(1, 1, 1)$, если $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением (1) ;
   (c) $f'_x(1, 1, 1)$, если $y = y(x, z)$ задана неявно уравнением (1) .
5. Пусть уравнения $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ определяют z как функцию от x и y. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.
6. Пусть функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
   и условиям $u(x, 2x) = x$; $u'_x(x, 2x) = x^2$.
   Найдите $u''_{xx}(x, 2x)$; $u''_{xy}(x, 2x)$; $u''_{yy}(x, 2x)$.
7. Функция $u = u(x, y)$ определяется системой уравнений
$$\begin{cases} u = f(x, y, z, t) \\ g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases} .$$
   Найдите $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.
8. Вычислите $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если $u = \frac{e^{-r}}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
9. Найдите выражение для $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, в сферических координатах,
$$(x, y, z) = (r\,\cos\varphi\,\cos\theta,\ r\,\cos\varphi\,\sin\theta,\ r\,\sin\varphi).$$

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 8 4 апреля 2014 года

Пусть поверхность M задана неявно системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad\cdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Мы ищем точки экстремума ее ограничения на M.

Теорема (принцип множителей Лагранжа). *Критические точки ограничения g на M соответствуют критическим точкам функции*

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = g + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k \ ,$$

то есть задаются уравнениями $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \\ f_i (= \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_j}) = 0 \end{cases}$.

1. Найдите максимум функции $x_1 x_2 \cdots x_n$ на множестве $\sum x_i = a, x_i \geqslant 0$.
2. Найдите экстремумы $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ при ограничениях $\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = 1$.
3. Докажите неравенство $(\sum |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leqslant (\sum |x_i|^p)^{1/p} + (\sum |y_i|^p)^{1/p}$.
4. Найдите максимум функции $\sum \alpha_i x_i$ на поверхности $\sum |x_i|^p = 1$ $(p > 1)$. Какому неравенству это соответствует?
5. Сколько нормалей можно опустить на эллипс из данной точки плоскости?
6. Найдите норму линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то есть $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ для стандартной нормы $\|x\| = \sum x_i^2$.
7. Определите максимум и минимум функции $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
8. Докажите, что на торе любая функция имеет не меньше трех критических точек. Существует ли функция а) на сфере б) на торе с ровно тремя критическими точками?

Независимый Московский Университет

Математический анализ 1-й курс II семестр

Листок 9 11 апреля 2014 года

Рассмотрим гладкую кривую C на плоскости и функцию S_q на ней, равную квадрату расстояния до фиксированной точки $q = (q_1, q_2)$ плоскости.

1. Докажите, что

   а) точка x критическая для S_q тогда и только тогда, когда точка q лежит на нормали к кривой в точке x;

   б) x-вырожденная критическая точка, если точка q является центром окружности кривизны (которая наилучшим образом приближает кривую в окрестности точки x).

   в) Критическая точка еще более вырожденная (локально ведет себя как x^4), если функция кривизны имеет локальный экстремум в точке x.

Множество центров кривизны называется *эволютой*, или *каустикой* исходной кривой.

2. Изобразите каустику а) параболы; б) эллипса.

3. Докажите, что каустика — огибающая семейства нормалей (каждая нормаль касается каустики).

4. Докажите, что каустика имеет особенности полукубического типа в точках, соответствующих экстремумам кривизны.

5. Найдите число максимумов, минимумов, и седел функции $x_1^5 + \cdots + x_5^5$ на двумерной поверхности M в $\mathbb{R}^5$, заданной уравнениями $x_1^2 + \cdots + x_5^2 = 1, \quad x_1^3 + \cdots + x_5^3 = 0, \quad x_1^4 + \cdots + x_5^4 = 0.$

6. Найдите критические точки функции $|z_1|^2 + |z_2|^2$ на (вещественно двумерной) поверхности, заданной комплексным уравнением $z_1^m + z_2^m = 1$ в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Сколько среди них минимумов, седел и максимумов?

7*. Поверхности M предыдущих двух задач — сферы с некоторым количеством ручек и проколов. Сколько же в действительности ручек и сколько проколов?

8. Найдите критические точки и определите их индексы Морса для функции $|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$ на (вещественно $2(n-1)$-мерной) поверхности, заданной комплексным уравнением $z_1^m + \cdots + z_n^m = 1$ в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.