Упражнения 4. Уравнение Калана-Симанчика

(Сканы/фото решений данных упражнений принимаются до: **20.03.14**
на e-mail: grigory@princeton.edu)

Упражнение 1: Предположим, что у нас есть некоторая неподвижная точка $\mathcal{A}^* \in \Sigma$. И пусть $\{y^\alpha\}$ локальные координаты на Σ, описывающие некоторую окрестность точки $\mathcal{A}^*$, такие, что сама неподвижная точка $\mathcal{A}^*$ соответствует $y^\alpha = 0$. (Можно считать, что y^α есть просто набор констант связи). Уравнение ренормгруппового потока $\frac{d}{dl}\mathcal{A} = B\{\mathcal{A}\}$, может быть записанно в терминах координат y^α, как

$$\frac{d}{dl}y^\alpha = B^\alpha(\{y^\alpha\}). \tag{0.1}$$

Далее $B^\alpha(\{0\}) = 0$ (почему?). Раскладывая B^α в ряд Тейлора получим

$$B^\alpha(\{y^\alpha\}) = K^\alpha_\beta y^\beta + C^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta y^\gamma + ... \tag{0.2}$$

Подходящей заменой координат $y^\alpha \to M^\alpha_\beta y^\beta$ матрица K^α_β может быть приведена к диагональному виду и мы получим

$$\frac{d}{dl}y^\alpha = \kappa_\alpha y^\alpha + c^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta y^\gamma + ..., \tag{0.3}$$

где κ_α — собтвенные числа матрицы K, и в данной формуле суммирование по α не производится. Покажите, что нелинейным преобразованием вида

$$y^\alpha = y^\alpha(\{\tilde{y}\}) = \tilde{y}^\alpha + A^\alpha_{\beta\gamma}\tilde{y}^\beta\tilde{y}^\gamma + ..., \tag{0.4}$$

можно привести уравнение (0.3) к виду

$$\frac{d}{dl}\tilde{y}^\alpha = \kappa_\alpha \tilde{y}^\alpha + O(\tilde{y}^3), \tag{0.5}$$

если $\kappa_\alpha - \kappa_\beta - \kappa_\gamma \neq 0$. Какие для этого нужно взять коэффициенты $A^\alpha_{\beta\gamma}$?

В общем случае уравнение

$$\frac{d}{dl}y^\alpha = \kappa_\alpha y^\alpha + c^\alpha_{\beta_1\beta_2} y^{\beta_1} y^{\beta_2} + d^\alpha_{\beta_1\beta_2\beta_3} y^{\beta_1} y^{\beta_2} y^{\beta_3} + ... \tag{0.6}$$

нелинейной заменой

$$y^\alpha \to y^\alpha + A^\alpha_{\beta_1\beta_2} y^{\beta_1} y^{\beta_2} + A^\alpha_{\beta_1\beta_2\beta_3} y^{\beta_1} y^{\beta_2} y^{\beta_3} + ... \tag{0.7}$$

можно привести к виду

$$\frac{d}{dl}y^\alpha = \kappa_\alpha y^\alpha + \text{Резонансные слагаемые}, \tag{0.8}$$

где Резонансные слагаемые это слагаемые вида $C^\alpha_{\beta_1\beta_2...\beta_n} y^{\beta_1} y^{\beta_2} ... y^{\beta_n}$, для которых верно $\kappa_\alpha = \kappa_{\beta_1} + \kappa_{\beta_2} + ... + \kappa_{\beta_n}$. Данное утверждение называется теоремой Пуанкаре-Дулака.

Упражнение 2: Рассмотрите уравнение всего лишь для одной координаты:

$$\frac{d}{dl}y = y - y^2. \tag{0.9}$$

Найдите преобразование $y = f(\tilde{y}) = \tilde{y} + ...$, такое, что для $\tilde{y}$ верно

$$\frac{d}{dl}\tilde{y} = \tilde{y}. \tag{0.10}$$

Изучите свойства отображения $y \to \tilde{y}$.

Упражнение 3: Пусть $\mathcal{A}_*$ фиксированная точка. И пусть $\{\lambda^i\}, i = 1, ..., n$ координаты на нестабильном многообразии $U(\mathcal{A}_*)$, такие, что $\mathcal{A}_*$ соответствует $\lambda^i = 0$. Данное многообразие $U(\mathcal{A}_*)$ описывает n-параметрическое семейство конечных локальных теорий поля. Будем приписывать индекс λ к корреляционной функции $\langle\varphi(x_1)...\varphi(x_N)\rangle_\lambda$, означающей, что она вычислена в теории $\in U(\mathcal{A}_*)$, имеющей координаты $\{\lambda^i\} = \lambda$. В координатах $\{\lambda^i\}$ уравнение РГ потока для этих же координат запишется как

$$\frac{d}{dl}\lambda^i(l) = -\beta^i(\lambda(l)), \tag{0.11}$$

где $-\beta^i$ компоненты векторного поля B^α на $U(\mathcal{A}_*)$. Покажите, со всеми подробностями, что для корреляционной функции имеется равенство

$$\langle\varphi(x_1)...\varphi(x_N)\rangle_{\lambda(l)} = Z^{\frac{N}{2}}(L)\langle\varphi(Lx_1)...\varphi(Lx_N)\rangle_{\lambda(0)}, \tag{0.12}$$

где $L = e^l$, нужны ли какие-то условия на $x_1, ...x_N$? Взяв инфинитезимальное преобразование $l = \delta l$, $L = 1 + \delta l$, $\lambda(l) = \lambda - \beta(\lambda)\delta l$, получите формулу

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + ND(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} \beta^i(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda^i}\right)\langle\varphi(x_1)...\varphi(x_N)\rangle_\lambda = 0, \tag{0.13}$$

где $D(\lambda) = L\frac{d}{dL}Z^{\frac{1}{2}}(L)|_{L=1}$, а также следует помнить, что $x = (x^1, ..., x^d)$, поэтому $x\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{a=1}^{d} x^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, где d — размерность пространства. Покажите, что $D(0) = D_\varphi$, где D_φ — размерность поля φ в фиксированной точке $\mathcal{A}_*$. Обобщите данную формулу на композитные поля $\mathcal{O}_\alpha$:

$$\sum_{k=1}^{N}\langle\mathcal{O}_{\alpha_1}(x_1)...(\mathcal{D}\mathcal{O})_{\alpha_k}(x_k)...\mathcal{O}_{\alpha_N}(x_N)\rangle_\lambda + \sum_{i=1}^{n}\beta^i(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda^i}\langle\mathcal{O}_\alpha(x_1)...\mathcal{O}_{\alpha_N}(x_N)\rangle_\lambda = 0, \tag{0.14}$$

где

$$(\mathcal{D}\mathcal{O})_\alpha(x) = \sum_{a=1}^{d} x^a\frac{\partial}{\partial x^a}\mathcal{O}_\alpha(x) + D_\alpha^\beta(\lambda)\mathcal{O}_\beta(x), \quad D_\alpha^\beta(\lambda) = -L\frac{d}{dL}z_\alpha^\beta(L)|_{L=1}. \tag{0.15}$$