Домашний экзамен за второй семестр

Задача 1. a) Определите все неизоморфные квадратичные расширения поля $\mathbb{Q}_p$.

b) Определите все различные кубические расширения поля $\mathbb{Q}_7$.

Задача 2. Опишите все числовые поля с дискриминантом ≤ 20.

Задача 3. Опишите все целые решения уравнения $13x^2 + 34xy + 22y^2 = 23$.

Задача 4. a) Пусть $l \geq 2$ — такое целое число, что $4l^3 + 27$ свободно от квадратов, $f_l(x) = x^3 + lx - 1$, α_l — вещественный корень $f_l(x)$, $K_l = \mathbb{Q}(\alpha_l)$. Покажите, что α_l^{-1} — фундаментальная единица $\mathcal{O}_{K_l}$

Подсказка: можете без доказательства использовать лемму Артина о единицах в кубических полях.

b) Посчитайте фундаментальную единицу и группу классов идеалов поля K_{10}.

Задача 5. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — квадратичное расширение. Пусть $\mathcal{O}$ — порядок поля K с кондуктором f (т.е. $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + f\mathcal{O}_K$). Покажите, что число классов $h_{\mathcal{O}}$ выражается через h_K формулой:

$$h_{\mathcal{O}} = \frac{h_K}{|\mathcal{O}_K^\times/\mathcal{O}^\times|} \cdot \frac{|(\mathcal{O}_K/f\mathcal{O}_K)^\times|}{|(\mathcal{O}/f\mathcal{O})^\times|}.$$

Задача 6. Покажите, что всякое поле алгебраических чисел имеет бесконечное число простых идеалов с простой нормой.

Задача 7. Пусть K — поле алгебраических чисел, $A(x)$ — число идеалов $\mathcal{O}_K$ с четной нормой $\leq x$, а $B(x)$ — число идеалов $\mathcal{O}_K$ с нечетной нормой $\leq x$. Докажите, что предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 1$ тогда и только тогда, когда K либо — $\mathbb{Q}$, либо K — квадратичное поле, в котором простое число 2 разветвлено.