# Листок 1

**1.** Имена и отчества 36 пассажиров вагона распределены независимо и случайно. Вероятность, что среди пассажиров есть Георгий Семёнович, равна $\frac{1}{10^4}$. Какова вероятность, что Георгий Семёнович Зеленов, купивший билет на поезд, встретит в вагоне полного тёзку (и в вагоне будет два Георгия Семёновича)? Больше $\frac{1}{5\times10^6}$ или меньше?

**Замечание 1.** $\frac{35}{36} \times \frac{1}{10^4}$ не является правильным ответом потому же, почему и $0$.

**2.** Рассмотрим подбрасывание двух групп симметричных монеток — из 100 и из 1000 штук, соответственно ($m > n$). Что вероятнее: что в первой группе доля монет, выпавших орлом вверх, будет больше отклоняться от $\frac{1}{2}$ или что во второй группе? Тот же вопрос про отклонение от половины количества монет, выпавших орлом вверх.

**3.** а) Докажите, что в любом вероятностном пространстве $\Omega$ любое событие положительной вероятности $A$ можно сделать вероятностным пространством так, что для любых двух событий в нём $B, C \in A$ выполнено $p_A(B|C) = p_\Omega(B|C)$.
б) Докажите, что если в пространстве $\Omega$ событие $A$ имеет вероятность 1, то для любого события $B$ выполняется равенство $p(B|A) = p(B)$.
в) Верно ли, что если $\Omega$ — вероятностное пространство, $A \in \Omega$ — событие положительной вероятности, и $B, C \subset A$ — события, вложенные в $A$, причём в пространстве $A$ они независимы, то и в пространстве $\Omega$ они независимы? Верно ли обратное? Верно ли, что если $p(A) > 0$ и $A, B, C$ попарно независимы, то $B \cap A$ и $C \cap A$ независимы в пространстве $A$.

**4.** Рассмотрим $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим следующее распределение вероятностей $p(k) = a^{k-1}\dfrac{1-a}{1-a^6}$, где $0 < a \neq 1$. Являются ли в нём независимыми события “$k$ чётно” и “$k$ не простое”, если $a = \sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{2}}$? Если $a = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$?

**5.** Некоторое событие $A$ имеет вероятность $10^{-6}$. У нас имеется метод проверки того, что оно случилось, который даёт ответ “да” с вероятностью 1 при условии, что событие $A$ случилось. При условии, что событие $A$ не случилось, проверка даёт ложное срабатывание с вероятностью $10^{-4}$. Какова вероятность события $A$, при условии, что проверка подтвердила, что событие произошло?

**6.** Пусть в некотором пространстве $\Omega$ фиксированы $A \subset B \subset \Omega$, $p(B \setminus A) \neq 0$. Могут ли $A$ и $B$ быть независимыми?

**7.** Двое играют в подбрасывание монеты до пяти побед (не обязательно подряд). Монета симметричная. Какая вероятность выигрыша первого игрока, при условии, что из первых пяти бросаний три раза победил первый и два раза победил второй?

**8.** Дано вероятностное пространство $\Omega$, число $n \in \mathbb{N}$ и $3n$ случайных величин на пространстве $\Omega$, задающих 3 вектора $X, Y$ и $Z$ в $\mathbb{R}^n$. Верно ли, что $P(Z \in \langle X, Y\rangle | X \neq \lambda Y) > P(Z \in \langle X, Y\rangle | X = \lambda Y)$.