

Рис. 1. Образующие и соотношения в группе кос

## 7. Косы. 21 марта 2013

### Определение группы кос

Коса состоит из  $n$  непересекающихся нитей, монотонно идущих в некотором фиксированном направлении (т.е. проекция скорости движения на это направление постоянна); конечные точки получаются при этом из начальных одним и тем же переносом в этом фиксированном направлении. Косы из  $n$  нитей, рассматриваемые с точностью до изотопии в классе кос (начальные и конечные точки неподвижны), образуют группу  $B_n$ . Композиция такая: одна коса приставляется к другой. Обратный элемент получается симметрией относительно плоскости, перпендикулярной фиксированному направлению.

**Задача 1.** а) Докажите, что группа кос  $B_n$  порождена образующими  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , изображёнными на рисунке 1.

б) Докажите, что эти образующие связаны соотношениями  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  при  $|i - j| > 2$  и  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ .

### Теорема Александра о представлении зацепления в виде замыкания косы

Каждой косе можно сопоставить её замыкание, дополнительно соединив начальные точки с конечными стандартным образом (тривиальной косой). Замыкание косы — это некоторое (ориентированное) зацепление.

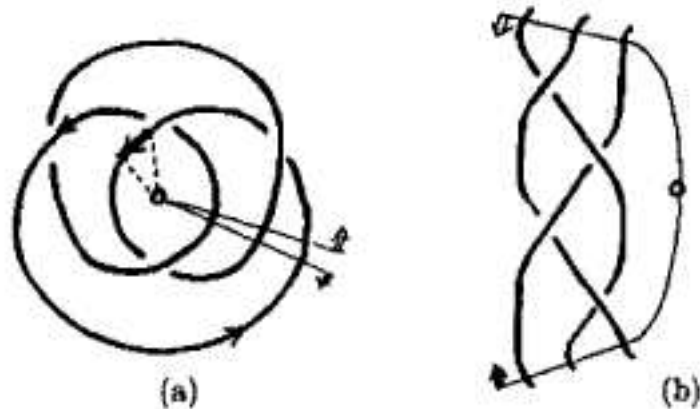


Рис. 2. Зацепление, обвивающееся вокруг точки

**Теорема 1.** Любое зацепление можно представить в виде замыкания некоторой косы.

Если зацепление обвивается вокруг некоторой точки, т.е. на диаграмме все его компоненты обходятся в одном направлении (по или против часовой стрелки), то такое представление получается легко (рис. 2).

Чтобы произвольное зацепление превратить в обвивающееся вокруг точки  $O$ , будем считать, что зацепление полигональное и нет звеньев, направленных в точку  $O$ . Звено, направленное в неправильную сторону (относительно точки  $O$ ), можно заменить на два звена, обходящих точку  $O$  с другой стороны (тут надо рассмотреть несколько случаев).

### Преобразования Маркова

Двум неизотопным косам при замыкании могут соответствовать изотопные зацепления. Преобразования Маркова описывают, когда это происходит.

*Первое преобразование Маркова* — замена косы  $b$  на сопряжённую косу  $aba^{-1}$ . Число нитей косы при этом не изменяется.

*Второе преобразование Маркова* изображено на рисунке 3. Число нитей при этом меняется.

**Задача 2.** Проверьте, что преобразования Маркова дают изотопные зацепления.

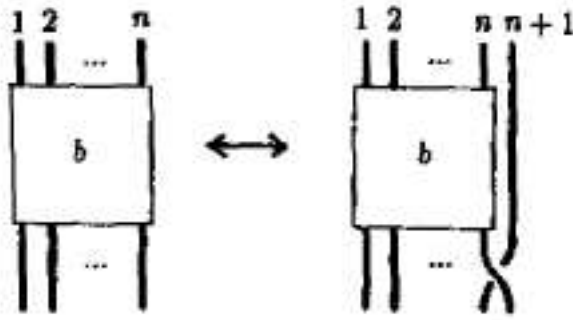


Рис. 3. Второе преобразование Маркова

Обратное утверждение (если две косы дают эквивалентные зацепления, то они получаются одна из другой преобразованиями Маркова) — трудная теорема.

### Представление Бурау

Представление Бурау — это гомоморфизм  $\rho: B_n \rightarrow GL(n-1, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ , заданный на образующих так:

$$\rho(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-3},$$

$$\rho(\sigma_i) = I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2},$$

$$\rho(\sigma_{n-1}) = I_{n-3} \oplus \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & -t \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.** Проверьте, что это определение отображения  $\rho$  согласовано с соотношениями в группе кос.

### Положительные косы

Положительные косы — это косы, которые можно представить в виде произведения образующих  $\sigma_i$  в положительных степенях. Положительные косы образуют моноид  $B_n^+$ .

Теорема Гарсайда: естественное отображение  $B_n^+ \rightarrow B_n$  инъективно, т.е. две положительные косы изотопны в классе всех кос тогда и только тогда, когда они изотопны в классе положительных кос.

#### ЛИТЕРАТУРА

Прасолов В.В., Сосинский А.Б., Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия, 1997. (С. 70–73, 81–84, 89–90.)