Задачи

Задача 8.1. Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\operatorname{ad}\mathfrak{g} = \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ (т.е. любое дифференцирование в ней является внутренним).

Задача 8.2. Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ алгебра Ли $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ содержит полупростые и нильпотентные части всех своих элементов.

Задача 8.3. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, α – корень (т. е. такой элемент $\mathfrak{h}^*$, для которого $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$), а t_α определён по правилу $\alpha(h) = \varkappa(t_\alpha, h)$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Докажите, что $\varkappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.

Задача 8.4. С помощью теоремы Ли доказать существование старшего вектора в любом конечномерном $\mathfrak{sl}(2)$-модуле.

Задача 8.5. Построим следующую естественную реализацию представления $\mathfrak{sl}(2)$ со старшим весом m. Пусть X, Y – базис двумерного векторного пространства, на котором $\mathfrak{sl}(2)$ действует обычным образом, а далее распространим действие на алгебру многочленов от двух переменных $\mathbb{C}[X, Y]$ по правилу дифференцирования: $z(fg) = z(f) \cdot g + f \cdot z(g)$ для $z \in \mathfrak{sl}(2)$, $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$. Покажите, что такое определение превращает $\mathbb{C}[X, Y]$ в (бесконечномерный) $\mathfrak{sl}(2)$-модуль. Затем покажите, что подпространство однородных многочленов степени m инвариантно под действием $\mathfrak{sl}(2)$ и является неприводимым представлением со старшим весом m.

Задача 8.6. Докажите, что все трёхмерные полупростые алгебры Ли имеют ту же систему корней, что и $\mathfrak{sl}(2)$, и, как следствие, изоморфны ей.

Задача 8.7. Докажите, что не существует полупростых алгебр Ли размерностей 4, 5 и 7.