# Задачи

**Задача 7.1.** Докажите, что если $\xi$, $\eta$, $\zeta$ – эндоморфизмы конечномерного векторного пространства, то
$$\mathrm{Tr}([\xi,\eta]\,\zeta) = \mathrm{Tr}(\xi\,[\eta,\zeta]).$$

**Задача 7.2.** Пусть $\mathfrak{g}$ – такая алгебра Ли, что $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,\xi\,\mathrm{ad}\,\eta) = 0$ для всех $\xi \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $\eta \in \mathfrak{g}$. Докажите, что $\mathfrak{g}$ разрешима.

**Задача 7.3.** а) Пусть эндоморфизмы $x$, $y \in \mathrm{End(V)}$ коммутируют.
Докажите, что $(x+y)_s = x_s + y_s$, $(x+y)_n = x_n + y_n$.
б) Верно ли аналогичное утверждение, если $x$ и $y$ не коммутируют?

**Задача 7.4.** Пусть $x \in \mathrm{End(V)}$, $x = x_s + x_n$ – разложение Жордана. Тогда $\mathrm{ad}\,x = \mathrm{ad}\,x_s + \mathrm{ad}\,x_n$ – разложение Жордана для $\mathrm{ad}\,x$ в $\mathrm{End(End(V))}$.

**Задача 7.5.** (Теорема Ли для групп Ли). а) Любое неприводимое конечномерное комплексное представление связной разрешимой группы Ли одномерно.
б) В пространстве любого комплексного конечномерного представления связной разрешимой группы Ли $G$ существует $G$-инвариантный вектор.
в) Любое комплексное конечномерное представление связной разрешимой группы Ли приводится к треугольному виду.

**Задача 7.6.** Пусть $\mathfrak{h}$ – идеал в $\mathfrak{g}$. Если $\varkappa$ – форма Киллинга на $g$, а $\varkappa_{\mathfrak{h}}$ – форма Киллинга на $\mathfrak{h}$, то $\varkappa_{\mathfrak{h}} = \varkappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$.

**Задача 7.7.** Пусть $\mathfrak{g}$ – ненулевая алгебра Ли. Тогда $\mathfrak{g}$ полупроста, если и только если её форма Киллинга $\varkappa$ невырожденна.

Алгебра Ли называется простой, если в ней нет идеалов, отличных от 0 и её самой.

**Задача 7.8.** Докажите, что любые две инвариантные симметрические билинейные формы на простой комплексной алгебре Ли пропорциональны.

**Задача 7.9.** Для алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$
а) укажите какую-нибудь картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$,
б) найдите ранг $\mathfrak{g}$,
в) выпишите корневое разложение и систему корней,
г) докажите, что $\mathfrak{g}$ проста.