Задачи

Задача 5.1. Докажите следующие утверждения:
а) Любая подалгебра и любая факторалгебра разрешимой алгебры Ли разрешимы.
б) Если идеал $\mathfrak{h}$ и факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ разрешимы, то и $\mathfrak{g}$ разрешима.
в) Если $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ – разрешимые идеалы в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{u}+\mathfrak{v}$ – разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$.

Задача 5.2. Докажите, что замыкание Мальцева идеала является идеалом.

Задача 5.3. Докажите, что алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет коммутативных идеалов.

Задача 5.4. Пусть $\mathfrak{g}$ – вещественная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ – её комплексификация.
а) Докажите, что подпространство $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ является подалгеброй тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.
б) Докажите, что $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})' = \mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ и, следовательно, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ разрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ разрешима (нильпотентна).
в) Докажите, что $\operatorname{rad}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = (\operatorname{rad}\mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$ и, значит, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ полупроста.

Задача 5.5. Пусть T – комплексное конечномерное неприводимое представление связной группы Ли G. Докажите, что ограничение представления T на радикал группы G скалярно. Сформулируйте соответствующее утверждение для алгебр Ли.

Задача 5.6. Если группа Ли G связна и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, то $G' = G$.

Задача 5.7. Всякая нетривиальная односвязная разрешимая группа Ли разлагается в полупрямое произведение нормальной подгруппы Ли коразмерности 1 и одномерной подгруппы Ли (изоморфной $\mathbb{k}$).