Задачи

Задача 3.1. Для координатного построения алгебры Ли по группе Ли вывести тождество Якоби непосредственно из ассоциативности умножения в группе G, рассмотрев члены степеней $\leqslant 3$ в разложении Тейлора координат произведения трёх элементов, близких к единице.

Задача 3.2. Касательная алгебра подгруппы Ли группы Ли G есть подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. В частности, для любой линейной группы Ли операция коммутирования в её касательной алгебре задаётся формулой $[X, Y] = XY - YX$.

Задача 3.3. Касательная алгебра ядра гомоморфизма групп Ли совпадает с ядром касательного гомоморфизма.

Задача 3.4. Пусть H – нормальная подгруппа Ли группы Ли G. Тогда $\mathfrak{h}$ – идеал алгебры $\mathfrak{g}$ и при каноническом отождествлении касательного пространства $T_e(G/H)$ с факторпространством $T_e(G)/T_e(H)$ касательная алгебра факторгруппы G/H есть факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Задача 3.5. Пусть T, S – линейные представления группы Ли G, а dT, dS – их дифференциалы. Вычислить дифференциалы сопряжённого представления T^* и произведения $T \otimes S$.

Задача 3.6. Опишите все неприводимые конечномерные представления
а) трёхмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;
б) двумерной некоммутативной алгебры Ли.

Задача 3.7. Укажите точное конечномерное представление
а) n-мерной коммутативной алгебры Ли;
б) трёхмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;
в) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$.

Для любой матрицы A определим её экспоненту e^A по формуле

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

Задача 3.8. Посчитать экспоненты e^A для а) $A = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$; б)$A =$ жорданов блок размера n с собственным значением 0; в) $A = t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; г)$A =$ жорданов блок размера n с собственным значением λ.

Задача 3.9. Пусть G_1, G_2 – связные подгруппы Ли группы Ли G. Тогда

$$G_1 \subset G_2 \Leftrightarrow \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2.$$

В частности,

$$G_1 = G_2 \Leftrightarrow \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2.$$

Задача 3.10. Связная подгруппа Ли H группы Ли G нормальна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ – идеал в $\mathfrak{g}$.

Задача 3.11. Ядро присоединённого представления связной группы Ли G совпадает с её центром $Z(G)$. Алгебра Ли группы $Z(G)$ совпадает с центром $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.