Задачи

Задача 2.1. Пусть V – линейное пространство. Построить представление группы $GL(V)$ в пространстве алгебр на V (в пространстве тензоров типа $(1,2)$). Доказать, что группа автоморфизмов любой алгебры является линейной группой Ли.

Задача 2.2. Описать все (с точностью до изоморфизма) алгебры Ли размерности 1, 2 и 3 a) над полем $\mathbb{C}$, b) над полем $\mathbb{R}$.

Задача 2.3. Пусть A – ассоциативная алгебра. Положим $[x,y] = xy - yx$. Доказать, что эта операция вводит на A структуру алгебры Ли. Проверить, что следующие классические алгебры Ли получаются таким образом из $\mathfrak{gl}(n)$:
a) $\mathfrak{gl}(V) = \mathfrak{gl}(n)$ – алгебра Ли всех линейных операторов в n-мерном пространстве V = алгебра Ли матриц порядка n;
b) $\mathfrak{sl}(n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid \operatorname{tr}(x) = 0\}$;
c) $\mathfrak{so}(n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid x + x^t = 0\}$;
d) алгебры Ли над $\mathbb{R}$: $\mathfrak{u}(n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid x + x^* = 0\}$ и $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n)$.
e) Пусть E_n обозначает единичную матрицу порядка n, а $I_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathfrak{sp}(2n) = \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid x^t I_{2n} + I_{2n} x = 0\}$.

Дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется линейное отображение $D\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющее соотношению

$$D[x,y] = [Dx,y] + [x,Dy].$$

Задача 2.4. Доказать, что множество всех дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{g}$ образует алгебру Ли относительно операции

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1.$$

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $\xi \in \mathfrak{g}$. Будем называть *внутренним дифференцированием* $\operatorname{ad}\xi$ отображение $\operatorname{ad}\xi\colon \eta \mapsto [\xi,\eta]$. (Убедиться, что это дифференцирование!)

Задача 2.5. Доказать, что внутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре Ли всех дифференцирований ($I \subset \mathfrak{g}$ является идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, если $[I, \mathfrak{g}] \subset I$).

Задача 2.6. Описать все дифференцирования по модулю внутренних
a) трёхмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;
b) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2+1)$;
c) алгебры Ли аффинных преобразований прямой $\mathfrak{aff}(1)$;
d) $\mathfrak{sl}(2)$.

Задача 2.7. Напомним, что $SO(n,\mathbb{R})$ – это группа линейных преобразований n-мерного векторного пространства над $\mathbb{R}$ с единичным определителем, сохраняющих евклидово скалярное произведение. Доказать, что $SO(2,R)$ – это окружность S^1.

Задача 2.8. Ввести на 3-мерной сфере S^3 структуру группы Ли (подсказка: вспомните про кватернионы).
Построить сюръективный гомоморфизм $S^3 \to SO(3,\mathbb{R})$. (Подсказка: рассмотрите действие алгебры кватернионов на себе сопряжениями). Проверить, что получилось двулистное накрытие $SO(3,\mathbb{R})$.

Задача 2.9. Построить двулистное накрытие $S^3 \times S^3 \to SO(4,\mathbb{R})$ (подсказка: пусть H - алгебра кватернионов; рассмотрите действие $H \times H$ на H умножением слева и справа).